

n-pla di numeri reali :
un'applicazione da $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$
ad $\mathbb{R}$

Esempio:
 $(\sqrt{2}, 1, -5, 1)$

$$1 \mapsto \sqrt{2}$$

$$2 \mapsto 1$$

$$3 \mapsto -5$$

$$4 \mapsto 1$$

$\mathbb{R}^n$ = insieme di tutte le
n-ple di reali.

Definisco la somma di n-ple

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\left((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \right) \mapsto (c_1, \dots, c_n)$$
$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$$
$$c_i = a_i + b_i$$

Esempio:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \left((x, y, z), (x', y', z') \right) & \longmapsto & (x+x', y+y', z+z') \\ & & (x, y, z) + (x', y', z') \end{array}$$

$$(1, 2, 0) + (5, -1, 3) = (6, 1, 3)$$

Definisco il prodotto per scalare:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^h & \longrightarrow & \mathbb{R}^h \\ \left(\alpha, (a_1, \dots, a_h) \right) & \longmapsto & (b_1, \dots, b_h) \\ & & b_i = \alpha \cdot a_i \end{array}$$

Esempio:

$$\alpha: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, (x, y, z))$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\longmapsto$$

$$(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$\alpha \cdot (x, y, z)$$

$$\text{es. } \left(1, \frac{1}{10}, \sqrt{2}\right) = \left(5, \frac{1}{2}, 5\sqrt{2}\right)$$

$$(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot)$$

Matrice di tipo $m \times n$ a elementi

reali : un'applicazione da

$$N_m \times N_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(1,1) \mapsto 10 \quad (1,2) \mapsto 0 \quad (1,3) \mapsto \frac{3}{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & \frac{3}{5} \\ -7 & 10 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$N_2 \times N_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(2,1) \mapsto -7 \quad (2,2) \mapsto 10 \quad (2,3) \mapsto \sqrt{2}$$

$$a_1^1 = 10 \quad a_2^1 = 0 \quad a_3^1 = \frac{3}{5}$$

$$a_1^2 = -7 \quad a_2^2 = 10 \quad a_3^2 = \sqrt{2}$$

Data $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \mathbb{N}_m \\ j \in \mathbb{N}_n}} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

definisco la trasposta di A

insieme di
tutte le
matrici di
tipo $m \times n$
& elem. reali

${}^t A = (b_{rs})_{\substack{r \in \mathbb{N}_n \\ s \in \mathbb{N}_m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

A^t
 A'

dove $b_{rs} = a_{sr}$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & \frac{3}{5} \\ -7 & 10 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 0 & 10 \\ \frac{3}{5} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matrice quadrata: stesso numero
di righe e di colonne.

$$M_n(\mathbb{R}) = M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

M_n

Una matrice quadrata A è simmetrica

se ${}^t A = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A \neq {}^t A \quad A \text{ NON simmetrica}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B (e anche $\in B$) e
simmetrica

Definisco la somma in $M_{n \times n}$

$$+ : M_{n \times n} \times M_{n \times n} \longrightarrow M_{n \times n}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{ij}^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{ij}^i \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} c_{ij}^i \end{pmatrix}$$

dove $c_{ij}^i = a_{ij}^i + b_{ij}^i$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & \frac{3}{5} \\ -7 & 10 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 1 & \frac{8}{5} \\ -5 & 13 & (4+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Definisco il prodotto per scalare:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \mathbb{R} \times M_{m \times n} \longrightarrow M_{m \times n} \\ & (\alpha, (a_{ij}^i)) \longmapsto (b_{ij}^i) = \alpha \cdot (a_{ij}^i) \quad \text{dove } b_{ij}^i = \alpha \cdot a_{ij}^i \end{aligned}$$

$$(\mathbb{R}, M_{m \times n}, +, \cdot)$$

Date matrici: $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \mathbb{N}_\ell \\ j \in \mathbb{N}_m}} \in M_{\ell \times m}$,

$$B = (b_{st})_{\substack{s \in \mathbb{N}_m \\ t \in \mathbb{N}_n}} \in M_{m \times n}$$

definisco il loro prodotto riga per colonna

come la matrice $C = (c_{pq})_{\substack{p \in \mathbb{N}_\ell \\ q \in \mathbb{N}_n}} \in M_{\ell \times n}$

dove
$$c_{pq} = \sum_{t=1}^m a_{pt} b_{tq} = a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + \dots + a_{pm} b_{mq}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$a_1' b_1' + a_2' b_1' + a_3' b_1' + a_4' b_1' \quad 2 \times 4$$

$$4 \times 3$$

$$\left((1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 0) \quad (1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2)) \quad (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + (-3) \cdot 6) \right)$$

$$C =$$

$$2 \times 3$$

$$\left((4 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0) \quad (4 \cdot 2 + (-5) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)) \quad (4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -19 \\ -2 & 17 & 6 \end{pmatrix}$$

$$a_1^2 b_3' + a_2^2 b_3' + a_3^2 b_3' + a_4^2 b_3'$$

Su M_n il prodotto è un'operazione binaria interna

$$: M_n \times M_n \longrightarrow M_n$$

$n \times n \quad \quad n \times n \quad \quad \quad n \times n$

Anche stando in M_n , il prodotto non è commutativo.

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 132 & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 98 & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

$(M_n, +, \cdot)$ "anello delle
matrici $n \times n$ "
prod. riga $\times$ colonna

C'è un elemento neutro per il prodotto:

la matrice $I_n = (\delta_{ij})_{i,j \in N_n}$ dove
(matrice identica)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

In fatti vale che, $\forall A \in M_n$, $A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{9} \\ 8 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I_2 =$$

$$\begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + \frac{7}{9} \cdot 0) & (1 \cdot 0 + \frac{7}{9} \cdot 1) \\ (8 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0) & (8 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{9} \\ 8 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Osservazione a margine:
 le I_n sono elementi neutri anche per
 matrici "rettangolari", ma da una
 parte sola.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 0 \cdot 4) & (1 \cdot 2 + 0 \cdot 5) & (1 \cdot 3 + 0 \cdot 6) \\ (0 \cdot 1 + 1 \cdot 4) & (0 \cdot 2 + 1 \cdot 5) & (0 \cdot 3 + 1 \cdot 6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

L'anello $(M_n, +, \cdot)$ è
non commutativo, unitario

↑
c'è elemento neutro
per il prodotto

DOMANDA

Quando siamo in un anello unitario
 $(A, +, \cdot)$ (quindi in cui c'è un elemento
 $e \in A$ tale che $\forall a \in A \quad a \cdot e = a = e \cdot a$)

mi chiedo: quali sono (se ci sono) elementi invertibili rispetto al prodotto, cioè elementi $a \in A$ tali che esista $b \in A$ per cui $a \cdot b = e = b \cdot a$.

Quali matrici quadrate di ordine n ammettano inversa rispetto al prodotto? Cioè:

per quali $A \in M_n$ esiste $B \in M_n$ per cui
 $A \cdot B = I_n = B \cdot A$?

Per rispondere dobbiamo inventare
un maestro: il determinante
di A .

Definizione ricorsiva di determinante.

Premessa: data $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in M_n$
chiamo minore complementare dell'elemento
 a_{ij} la matrice $M_{ij} \in M_{n-1}$ ottenuta da A
cancellando la riga i e la colonna j

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$a_1^2 = 4$$

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } n=1 \quad A = (a_i') \quad \det A \stackrel{\text{def}}{=} a_1'$$

Per ogni altro n , definisco
 $\det A = a_1' \cdot A_1' + a_2' \cdot A_2' + \dots + a_n' \cdot A_n'$

$$\text{dove } A_{ij}' = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}')$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 =$$

$$= a_1^1 \cdot (-1)^{1+1} \det(M_1^1) + a_2^1 \cdot (-1)^{1+2} \det(M_2^1) =$$

$$= a_1^1 \cdot a_2^2 + a_2^1 \cdot (-1) \cdot a_1^2 = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

Example:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = -2 - 15 = -17$$

$$h=3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

TEOR - $A \in M_n$
è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

PROP - Anche con $n \neq 1$ vale

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{j,j}^h A_{j,j}^h = a_{1,1}^h A_{1,1}^h + a_{2,2}^h A_{2,2}^h + \dots + a_{n,n}^h A_{n,n}^h$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^i A_{i,i}^i$$

Esercizio 1 Verificate che
anche

$$4 \cdot A_1^2 + 5 A_2^2 + 6 A_3^2 = 0$$

e pure

$$3 \cdot A_3^1 + 6 \cdot A_3^2 + 9 \cdot A_3^3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

PROP - Sia $\det A \neq 0$, allora
la inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \dots & A^n_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & \dots & A^n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^1_n & A^2_n & \dots & A^n_n \end{pmatrix}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det A = -2 - 15 = -17 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 \\ A^1_2 & A^2_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(-2) & (-1)^{2+1}5 \\ (-1)^{1+2}3 & (-1)^{2+2}1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$