PROP- A ha una riga (colonna) nulla $\Rightarrow \det A = 0$

TEOR- $\det A = \det {}^tA$

PROP- A ha due righe (colonne) uguali $\Rightarrow \det A = 0$

PROP-

Sia B ottenuta da A scambiando due sue righe (colonne). Allora

$$\det B = -\det A$$

PROP - Sia B ottenuta da A moltiplicando una sua riga colonna per $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\det B = \alpha \det A$$

Combinazione lineare di certi elementi (n-ple, matrici, ...) è il risultato dell'aver moltiplicato quegli elementi per certi numeri, e poi aver sommato i risultati.

Un esempio di combinazione lineare in $\mathbb{R}^3$:

combini di $(1,-3,2)$, $(6,0,-4)$ mediante gli scalari 5 e -1:

$$5\cdot(1,-3,2)+(-1)(6,0,-4)=$$

$$=(5,-15,10)+(-6,0,4)=$$

$$=(-1,-15,14)$$

TEOR -

In A esiste una colonna riga che è combinazione lineare delle colonne altre righe

$$\Longleftrightarrow \det A = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

PROP –

Sia B ottenuta da A sommando ad UNA colonna riga di A una combinazione lineare DELLE ALTRE colonne righe di A $\Rightarrow \det B = \det A$

DEF - Una matrice quadrata $A = (a^i_j)$ si dice triangolare alta se tutti gli elementi a^i_j con $i > j$ sono nulli

bassa $i < j$

Esempi di triangolare alta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A si dice diagonale se è triangolare alta e bassa

PROP –

Sia $A = (a^i_j)$ triangolare (alta o bassa) $\Longrightarrow$ $\det A =$

$$= \prod_{i=1}^{n} a^i_i =$$

$$= a^1_1 \cdot a^2_2 \cdots a^n_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} +$$

lungo la 1ª riga

$$+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \cancel{0} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

lungo la 1ª colonna

$$= 36 + 0 + 2 \cdot (-17) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{III} \leftarrow \underline{III} + (-2)\,I$$

$$2 + k\,1 = 0$$

$$k = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det B =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot ? + 0 \cdot ? =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \quad III \leftarrow III - 2I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad III \leftarrow III + \cancel{k}\left(-\frac{3}{5}\right) II$$

$$3 + 5k = 0$$

$$k = -\frac{3}{5}$$

$$\sim$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det C = 1 \cdot \cancel{5} \cdot \frac{2}{\cancel{5}} = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix} =$$

$$B$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 36 & 11 & -17 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 18 & 11/2 & -17/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Trasformazioni elementari di riga:

T_1: scambio due righe

T_2: ad una riga somma una comb. lin. delle altre righe

T_3: moltiplico una riga per un numero $\neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Trucco per invertire A:

scrivo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

e, con operazioni elementari di riga (che opero su TUTTA la nuova matrice) porto la parte di destra a diventare I_3. Magicamente la parte sinistra diventa A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - 2\mathrm{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} - \frac{3}{5}\mathrm{III}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \leftarrow \frac{5}{2}\mathrm{III}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -5 & \cancel{-6}\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} \cdot \frac{1}{5}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ -5 & \cancel{-6}\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} - \frac{1}{5}\mathrm{III}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & \cancel{\frac{7}{5}}\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -5 & \cancel{-6}\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{I} \leftarrow \mathrm{I} + 2\mathrm{II} - 3\mathrm{III}]{} \boxed{\begin{pmatrix} 18 & \cancel{104/5}\ 11/2 & -17/2 \\ 1 & \cancel{7/5}\ \frac{1}{2} & -1/2 \\ -5 & \cancel{-6}\ -\frac{3}{2} & 5/2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Spazio vettoriale su $\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, V, \overset{\oplus}{+}, \overset{\odot}{\circ})$$ tale che

$$\emptyset \neq V \qquad +: V \times V \to V \qquad \circ: \mathbb{R} \times V \to V$$

$\forall\, u, v, w \in V \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgano

1a) $(u+v)+w = u+(v+w)$

1b) $\exists\, \overline{0}_V$ t.c. $\overline{0}_V + v = v = v + \overline{0}_V$

1c) $\forall\, v \in V \ \exists\, (-v)$ t.c. $(-v)+v = \overline{0}_V = v+(-v)$

1d) $u+v = v+u$

2) $(\alpha+\beta)\overset{\odot}{\cdot} v = \alpha \cdot v \overset{\oplus}{+} \beta \cdot v$

3) $\alpha(u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

4) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$

5) $1 \cdot v = v$

Esempi

1) $V = \mathbb{R}^n$

2) $V = M_{m \times n}$

3) $V = \{$forze applicate in un punto dello spazio$\}$

4) $V = \{$segmenti del piano con un estremo in un fissato punto $N\}$

4') Idem nello spazio

5) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

5') $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ continua su $\mathbb{R} \}$

5'') $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata continua $\}$

6) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ polinomiale $\}$

6') $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ polinomiale di grado $\leq k$ fissato $\}$

7) $V = \{$ successioni reali $\}$

7') $V = \{$ successioni reali convergenti $\}$

7'') $V = \{$ successioni reali convergenti a zero $\}$

Gli spazi vettoriali sono le strutture in cui si lavora comodamente con combinazioni lineari

Combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_h \in V$ mediante gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \in \mathbb{R}$:

il vettore

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_h \cdot v_h$$

Dato in V $\emptyset \neq X \subset V$, chiamo chiusura lineare (o span) di X

l'insieme

$L(X)$ $\overset{def}{=}$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di X

$\mathrm{span}(X)$

$\langle X \rangle$

DEF - Sottospazio vettoriale di V: un sottoinsieme $U \subseteq V$ che, con le stesse operazioni, è esso stesso spazio vettoriale

PROP - Qualunque sia l'insieme $X \subseteq V$, $L(X)$ è un sottospazio vettoriale

---

DIM - Sia $X = \{u, v\}$

Sia $U = L(X)$, siano $\alpha u + \beta v$ e $\gamma u + \delta v \in L(X)$

Mi chiedo: la loro somma sta anch'essa in $L(X)$?

$$(\alpha u + \beta v) + (\gamma u + \delta v) =$$

$$(\alpha u + \gamma u) + (\beta v + \delta v) =$$

$$\underbrace{(\alpha + \gamma)}_{\in \mathbb{R}} u + \underbrace{(\beta + \delta)}_{\in \mathbb{R}} v \qquad \checkmark$$

Data $\alpha u + \beta v \in L(X)$ e dato $\xi \in \mathbb{R}$ mi chiedo $\xi \cdot (\alpha u + \beta v) \in L(X)$?

$$\xi \cdot (\alpha u + \beta v) =$$

$$= \xi \cdot (\alpha u) + \xi \cdot (\beta v) =$$

$$= \underbrace{(\xi \cdot \alpha)}_{\in \mathbb{R}} \cdot u + \underbrace{(\xi \cdot \beta)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v \qquad \checkmark$$

X è detto <u>sistema di generatori</u> <u>per</u> V se $L(X) = V$

Un insieme $X \subset V$ si dice <u>linearmente dipendente</u>

se esiste almeno un elemento di X che è combinazione lineare di altri elementi di X,

X è <u>linearmente indipendente</u>

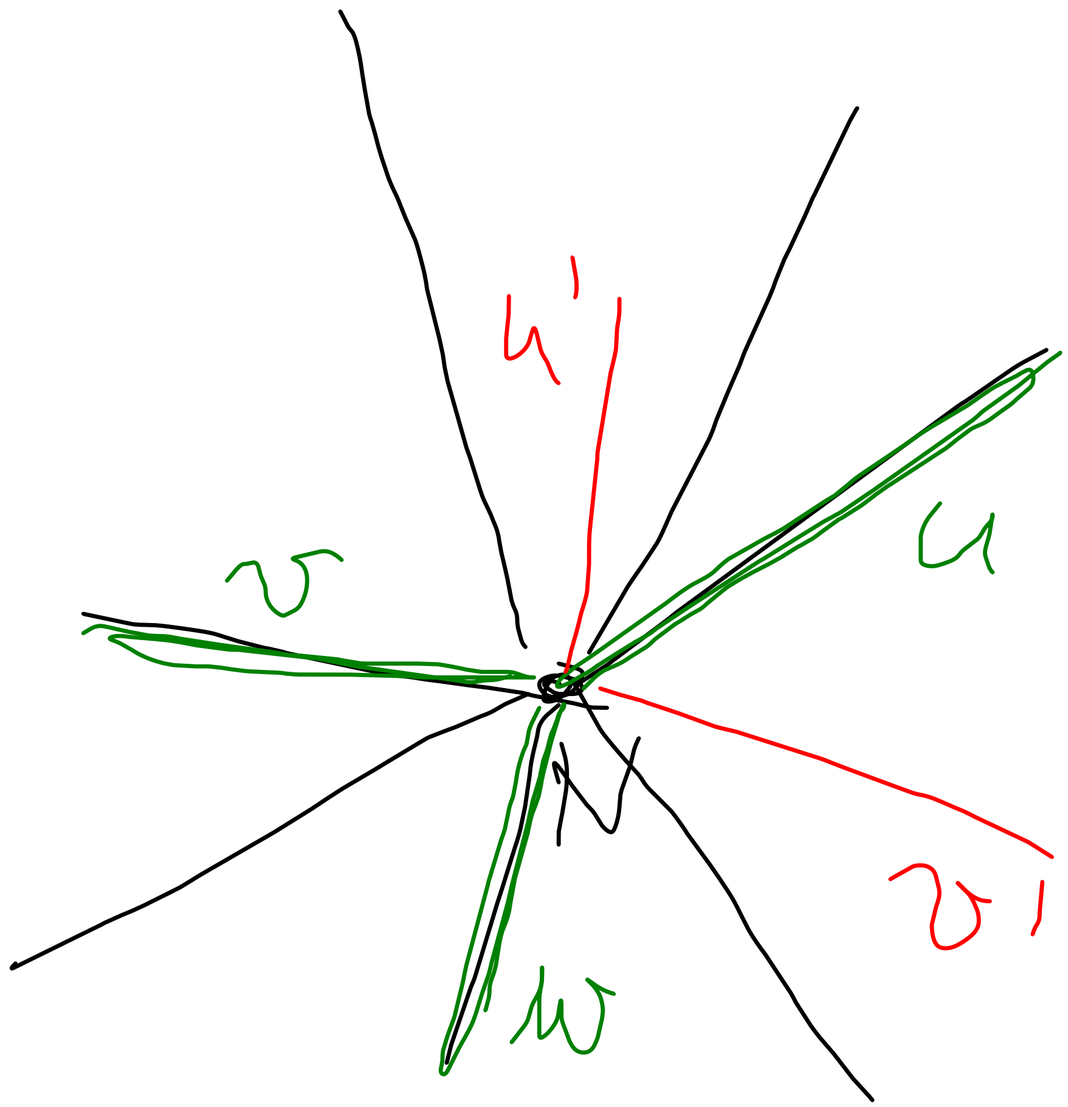
se nessuno dei suoi elementi è combinazione lineare di altri elementi di X.

Base di uno spazio vettoriale

V è un qualunque suo sistema di generatori linearmente indipendente.

$V = \{$ segmenti del piano con un estremo in $N \}$

TEOR - Se in V c'è una base di n elementi, allora TUTTE le basi di V hanno n elementi


u'
u
v
w
v'

PROP - U risulta essere sottospazio vettoriale $\iff$ U è 1) chiuso rispetto alla somma, cioè

$\forall u, u' \in U$,

$u + u' \in U$

e 2) chiuso rispetto al prodotto per scalare, cioè

$\forall u \in U \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot u \in U$

DEF – Dimensione di uno spazio vettoriale V ($\dim V$) è il numero di elementi di una sua qualunque base.