

$$(\cancel{x}-10)(\cancel{x}^2-\cancel{6x}+9)=0$$

$$(\cancel{x}-3)^2$$

$$\begin{array}{l} \text{saluz: } 3, 10 \\ \text{multepl: } 2, 1 \end{array}$$

$$(x-10)(x-3)=0$$

$$\begin{array}{l} \text{saluz: } 3, 10 \\ \text{multepl: } 1, 1 \end{array}$$

Forme bilinear, e quadratiche

Forma bilineare un'applicazione

$\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall u, v, w \in V$
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(u, v+w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$$

$$\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$$

$$\varphi(\alpha u, v) = \alpha \varphi(u, v) = \varphi(u, \alpha v)$$

ESEMPLI

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \right) \longmapsto \det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}$$

infatti

$$\det \begin{pmatrix} 5x & 5y \\ x' & y' \end{pmatrix} = 5 \det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ 5x' & 5y' \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} (a+c) & (b+d) \\ x' & y' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ x' & y' \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c & d \\ x' & y' \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ (a+c) & (b+d) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times$$

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi: \{ \text{polinomi} \} \times \{ \text{polinomi} \} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \int_a^b p(x) \cdot q(x) dx \end{aligned}$$

Come riconoscere una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right) & \longmapsto & \varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \end{array}$$

φ è bilineare $\Leftrightarrow$ φ è una funzione polinomiale
o nulla
o omogenea di 1° grado nelle x_i
e di 1° grado nelle y_i

Example:

$\phi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$((x, y, z), (x', y', z'))$

$\rightarrow \mathbb{R}$

0

OK

$\rightarrow 3x + 2xy' - 6zz'$ NO

$\rightarrow 3xy + 2xy' - 6zz'$ NO

$\rightarrow 3x'y + 2xy' - 6zz'$ OK

Matrice di Gram di una forma bilineare
 are φ rispetto a una base di V
 ordinata

Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V .

$$G = (g_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_n} \quad \text{can} \quad g_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

PROP- Se $u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$, $v \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, \dots, y_n)$,

allora

$$\varphi(u, v) = \underbrace{(x_1 \dots x_n)}_{1 \times n} \cdot \underbrace{G}_{n \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1}$$

$1 \times n$

$$\varphi(x, y, z) = 3x^2y + 2xy^2 - 6z^2$$

$$\varphi(1, 0, 0), (1, 0, 0) = 0$$

$$\varphi(1, 0, 0), (0, 1, 0) = 2$$

$$\varphi(1, 0, 0), (0, 0, 1) = 0$$

$$\varphi(0, 1, 0), (1, 0, 0) = 3$$

$$\varphi(0, 1, 0), (0, 1, 0) = 0$$

$$\varphi(0, 1, 0), (0, 0, 1) = 0$$

$$\varphi(0, 0, 1), (1, 0, 0) = 0$$

$$\varphi(0, 0, 1), (0, 1, 0) = 0$$

$$\varphi(0, 0, 1), (0, 0, 1) = -6$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Forma quadratica su V

un'applicazione

$$q: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che esista una forma bilineare
 $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui, $\forall v \in V$ sia

$$q(v) = \varphi(v, v)$$

PROP - Se q è quadratica, ci sono infinite
forme bilinear! ad essa associate, di cui
esattamente una è simmetrica.

L'unica forma bilineare simmetrica associata alla forma quadratica q e' detta forma polare di q

Matrice di Gram di una forma quadratica q
la matrice di Gram della sua forma polare.

φ si dice simmetrica se $\forall u, v \in V$

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

PROP φ simmetrica $\Leftrightarrow G$ simmetrica

PROP- $q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ risulta quadratica

$q(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione polinomiale
a nulla

a omogenea di 2° grado nelle $x_1, \dots, x_n$

Esempi:

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \longmapsto 0$$

OK

$$\longmapsto x + 5xy + 3y^2 - 2yz$$

NO

$$\longmapsto x^2 + 5xy + 3y^2 - 2yz$$

OK

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x, y, z), (x', y', z')) \longmapsto$$

$$3x'y + 2xy' - 6zz'$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto$$

$$\varphi((x, y, z), (x, y, z)) = 3xy + 2xy - 6z^2 =$$

$$= 5xy - 6z^2$$

$$\varphi_5: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{2}x'y + \frac{5}{2}xy' - 6zz'$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

PROP - Se $u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$,

allora

$$q(u) = (x_1 \dots x_n) \circ G \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Chiamo congruenti matrici quadrate
simmetriche A, A' che siano matrici di
Gram della stessa forma quadratica rispetto
a basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

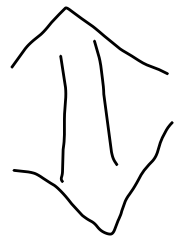
PROP $A, A' \in M_n$ simmetriche

A congruente ad $A' \iff \exists E \in M_n$, con $|E| \neq 0$ t.c.

$$A' = {}^t E \cdot A \cdot E$$

Segnatura di una forma quadratica della
sua matrice di Gram G coppia
 $\sigma_G = (\sigma_+, \sigma_-)$ dove σ_+ (indice di positività) e
la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori
positivi di G

TEOR - G, G' risultano congruenti



$$\sigma(G) = \sigma(G')$$

Dato un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
chiediamo permanenza ogni coppia (a_i, a_{i+1}) dello
stesso segno, variazioni ogni coppia (a_i, a_{i+1}) di
segno opposti

TEOR - (Harriot-Cartesio) Sia $p(x)$ un polinomio
a coefficienti reali, privo di radici complesse. Allora
la somma delle molteplicità delle sue radici ^{negative} positive è
uguale al numero di ^{permanenze} variazioni

Esempio - Supponiamo che la matrice simmetrica
 $G \in M_7$ abbia polinomio caratteristico

$$\lambda^7 - 11\lambda^6 - 8\lambda^5 - 42\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda + 3$$

$$\# \text{var.} = 4$$

$$\# \text{perm} = 3$$

deduco $\sigma(G) = (4, 3)$

Una forma quadratica q su V è detta

definita positiva se $\forall v \in V - \{\bar{0}_V\} \quad q(v) > 0$

negativa

< 0

TEOR - q (e la sua matrice di Gram G)
 risulta definita ^{negativa} positiva

$$\sigma(G) = \begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, n \end{pmatrix}$$

TEOR (Criterio di Sylvester)

Data $G = (g_{ij})$ si ha $M_1 = (g_{11})$, $M_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$, ecc. fino ad $M_n = G$

G (e q) risulta
 definita positiva
 negativa

$\Leftrightarrow$

$$\det M_1 > 0$$

$$\det M_2 > 0$$

$$\det M_n > 0$$

+

+

+

+

+

+

$$-\det M_1 < 0$$

$$+\det M_2 > 0$$

$$\det M_n > 0 \text{ se } n \text{ pari}$$

$$< 0 \text{ se } n \text{ dispari}$$

Prodotto scalare su V :

Ogni forma bilineare, simmetrica,
con forma quadratica definita positiva,

Tutte le nozioni (in particolare
l'ortogonalità e la norma euclidea)
che conosciamo per i consueti prodotti
scalari della fisica si estendono a
queste forme bilineari.