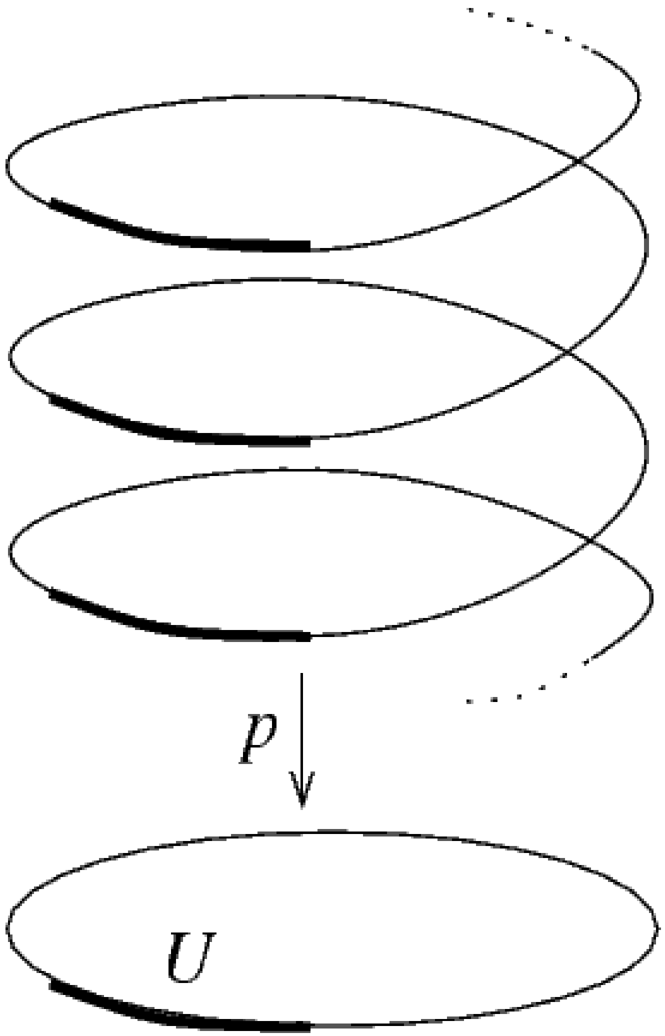
4 - Proiezioni di rivestimento [S2.1-2.6, M6 es.22-25, H1.3]



Una *proiezione di rivestimento* di uno spazio X è una mappa $p : \tilde{X} \to X$ tale che ogni $x \in X$ ammette un intorno aperto U con la proprietà che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti di $\tilde{X}$, ognuno dei quali è applicato omeomorficamente da p in U (U è *regolarmente ricoperto*). $\tilde{X}$ è detto *spazio di rivestimento* di X.

È immediato vedere che la *fibra di x* $\in X$, cioè $p^{-1}(x)$, è uno spazio discreto per ogni $x \in X$; inoltre p risulta suriettiva, ed è un omeomorfismo locale.

Esempi

(4.1) Si consideri S^1 come sottoinsieme del piano dei numeri complessi. Allora

$$p: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \\ x \longmapsto e^{ix} \end{array}$$ è una proiezione di rivestimento.

(4.2) In modo analogo si vedono il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ come spazio di rivestimento del toro T_4 e il piano $\mathbb{E}^2$ come spazio di rivestimento del cilindro e del toro.

<u>Teorema 4.1</u> (Unicità del sollevamento) - Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una proiezione di rivestimento puntata. Sia Y uno spazio connesso e $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una mappa puntata. Se vi è una mappa $f' : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (<u>sollevamento di f</u>) tale che $pf' = f$, allora essa è unica.

<u>Dimostrazione</u> (traccia) - Supposta l'esistenza di due sollevamenti f' ed f'', detti A e B i sottoinsiemi di Y su cui $f' = f''$ e $f' \neq f''$ rispettivamente, $y_0 \in A \neq \emptyset$; si dimostra che A e B sono aperti e chiusi e quindi, essendo $Y = A \cup B$ connesso, è $B = \emptyset$. $\square$

Teorema 4.2 (Sollevamento dei cammini) - Sia $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\rightarrow(X,x_0)$ come sopra. Se ω è un cammino in X con $\omega(0)=x_0$, allora vi è un cammino ω' in $\tilde{X}$ con $\omega'(0)=\tilde{x}_0$ tale che $p\,\omega'=\omega$, ed esso è unico.

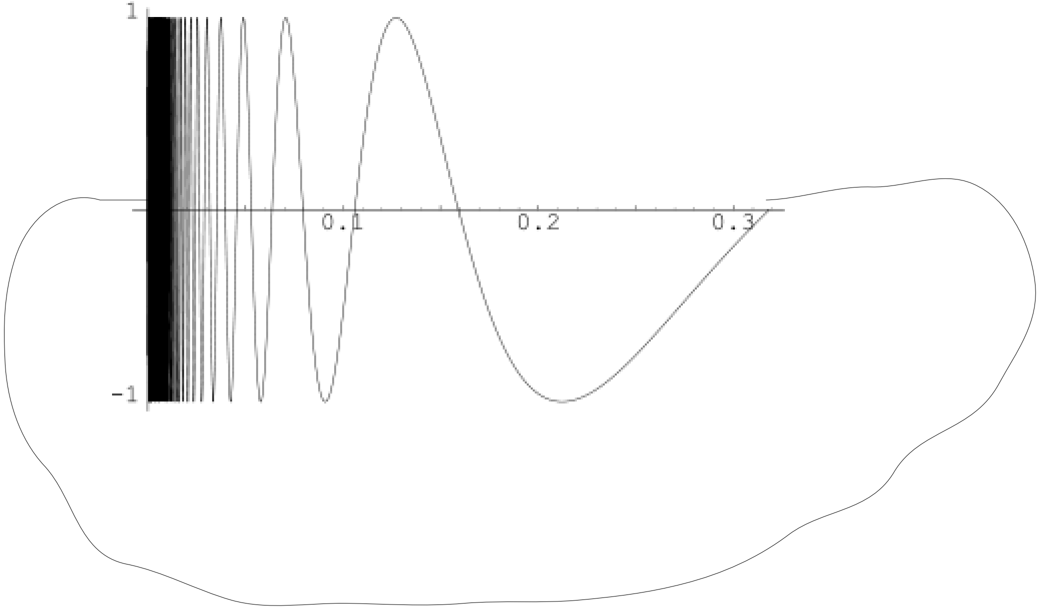
Dimostrazione (traccia) - L'intervallo I viene suddiviso in modo che, per ogni lato I_j, $\omega(I_j)$ stia in un aperto regolarmente ricoperto di X; su tale aperto viene costruito un sollevamento di $\omega|_{I_j}$ compatibile con il sollevamento di $\omega|_{I_{j-1}}$ o (per $j=1$) con la condizione $\omega'(0)=\tilde{x}_0$. L'unicità viene dal Teor. 4.1. $\square$

Teorema 4.3 (Sollevamento delle omotopie) - Sia $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$ come sopra. Siano poi (Y,y_0) uno spazio puntato arbitrario, $f:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ una mappa puntata che ammette un sollevamento $f':(Y,y_0)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x}_0)$. Allora ogni omotopia $F: Y\times I\rightarrow X$ tale che $F|_{Y\times\{0\}}=f$ ammette un sollevamento $F': Y\times I\longrightarrow\tilde{X}$ (cioè $pF'=F$) tale che $F'|_{Y\times\{0\}}=f'$. $\square$

Corollario 4.4 - $p_\# : \pi_1(\tilde{X},\hat{x}_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$ è iniettiva. $\square$

Si deve tener presente che i sollevamenti (più di uno, se non si pretende che sia $\omega'(0)=\tilde{x}_0$) di un cappio ω in X basato su x_0 non sono in generale cappi in $\tilde{X}$: lo sono se e solo se $[\omega]\in p_\#(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$.

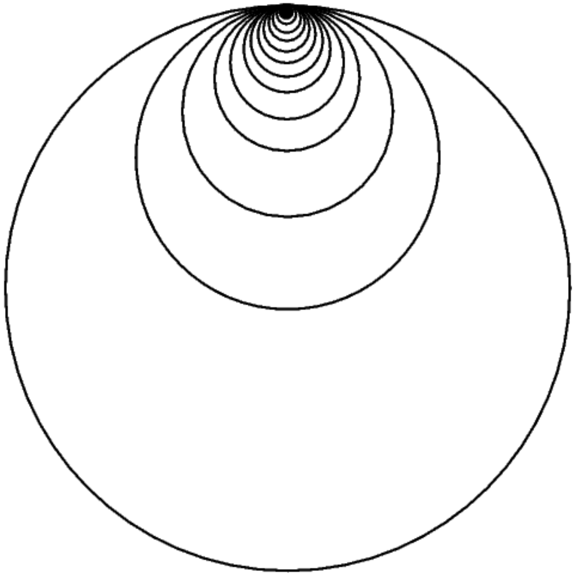
Uno spazio topologico X è detto <u>localmente connesso per archi</u> se per ogni $x_0 \in X$, per ogni aperto U contenente x_0, esiste un aperto V connesso per archi tale che $x_0 \in V \subset U$.



<u>Teorema 4.5</u> (Criterio di sollevamento) - Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ come sopra. Siano X e Y connessi e localmente connessi per archi; $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ ammette un sollevamento $f' : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se $f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

<u>Dimostrazione</u> (traccia) - Se esiste il sollevamento f', allora $f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) = p_{\#} f'_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Viceversa, sia verificata l'inclusione. Il sollevamento f' viene costruito per punti: per ogni $y \in Y$, sia ω un cammino da y_0 a y; allora $f\omega$ è un cammino in X da x_0 ad $f(y)$, che ammette un sollevamento $(f\omega)'$; si pone allora $f'(y) = (f\omega)'(1)$. L'ipotesi garantisce, allora, l'indipendenza di $f'(y)$ dalla scelta di ω. $\square$

Uno spazio topologico X si dice *semilocalmente 1-connesso* se per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno N di x_0 tale che che $i_\#: \pi_1(N, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo nullo. Evidentemente ogni varietà gode di entrambe le proprietà.



Teorema 1 *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso, e sia $x_0 \in X$. Per ogni sottogruppo H del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ vi sono un $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e una proiezione di rivestimento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ tali che $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. Inoltre, tali $\tilde{X}$ sono unici a meno di equivalenza*[1].

---

[1] Cioé, se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ e $p' : (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ sono rivestimenti corrispondenti allo stesso sottogruppo H, allora esiste un omeomorfismo $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ tale che $p'\varphi = p$.

Traccia di dimostrazione:
Accenniamo soltanto alla costruzione dello spazio topologico $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = P(X, x_0)/\sim$$

- $P(X, x_0) = \{\omega : I \to X \,|\, \omega(0) = x_0\} = \{$ cammini uscenti da $x_0\}$.
- " $\sim$ " identifica i cammini ω e ω' tali che $\omega(1) = \omega'(1)$ e che $[\omega \cdot \omega'^{-1}] \in H$.

- la topologia di $\tilde{X}$ è ottenuta come quoziente della "topologia compatta-aperta" su $P(X, x_0)$.

La *topologia compatta-aperta* su $P(X, x_0)$ è la topologia generata da tutti i sottoinsiemi

$$< K, U >= \{\omega \in P(X, x_0) \mid \omega(K) \subseteq U\}$$

dove K è un compatto di I e U è un aperto di X. Al variare di $K \subset I$ e di $U \subset X$ otteniamo tutti gli aperti che generano la topologia.

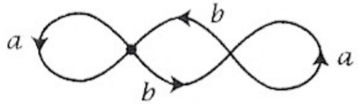
Una proiezione di rivestimento $\tilde{X} \longrightarrow X$ è detta *rivestimento universale di X* se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso. Se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ e $p' : (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \longrightarrow (X, x_0)$ sono rivestimenti universali, esiste un unico omeomorfismo $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ tale che $p'\varphi = p$.

Data una proiezione di rivestimento $\tilde{X} \longrightarrow X$, si chiamano *trasformazioni di rivestimento* gli omeomorfismi $\varphi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ che conservano le fibre, cioè tali che $p\varphi = p$; esse formano gruppo.

> *Proposizione 4.6* - Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un rivestimento universale e sia $\tilde{X}$ localmente connesso per archi. Allora il gruppo di trasformazioni di rivestimento di p è canonicamente isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$. □

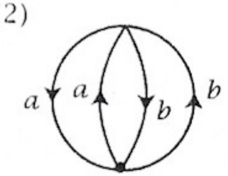
Some Covering Spaces of $S^1 \vee S^1$

(1)



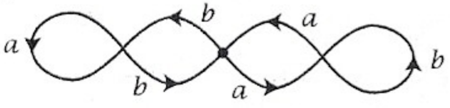
$\langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$

(2)



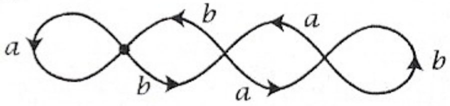
$\langle a^2, b^2, ab \rangle$

(3)



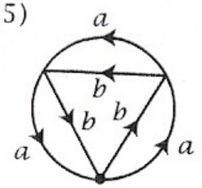
$\langle a^2, b^2, aba^{-1}, bab^{-1} \rangle$

(4)



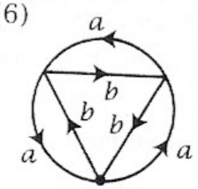
$\langle a, b^2, ba^2b^{-1}, baba^{-1}b^{-1} \rangle$

(5)



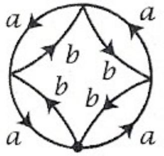
$\langle a^3, b^3, ab^{-1}, b^{-1}a \rangle$

(6)



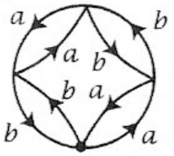
$\langle a^3, b^3, ab, ba \rangle$

(7)



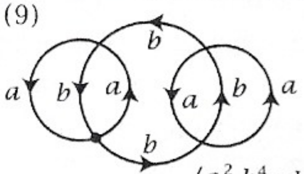
$\langle a^4, b^4, ab, ba, a^2b^2 \rangle$

(8)



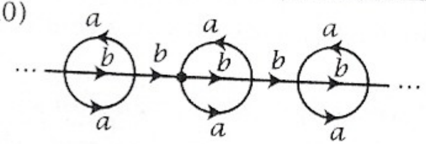
$\langle a^2, b^2, (ab)^2, (ba)^2, ab^2a \rangle$

(9)



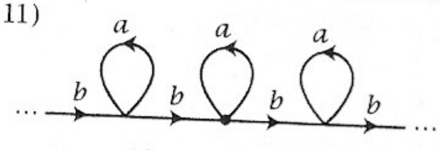
$\langle a^2, b^4, ab, ba^2b^{-1}, bab^{-2} \rangle$

(10)



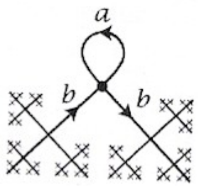
$\langle b^{2n}ab^{-2n-1}, b^{2n+1}ab^{-2n} \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$

(11)



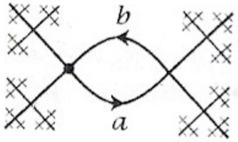
$\langle b^n a b^{-n} \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$

(12)



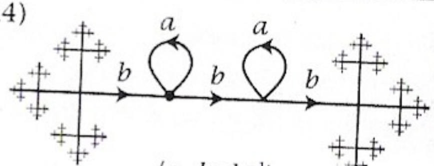
$\langle a \rangle$

(13)



$\langle ab \rangle$

(14)



$\langle a, bab^{-1} \rangle$

Ricordiamo che se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento, allora esiste una corrispondenza biunivoca naturale fra la fibra $p^{-1}(x_0)$ e le classi laterali di $p_\sharp\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ in $\pi_1(X, x_0)$. La corrispondenza si ottiene prendendo un qualunque cappio σ che rappresenta una classe laterale e sollevandola rispetto a p all'arco σ' tale che $\sigma'(0) = \tilde{x}_0$. Alla classe laterale di σ viene fatto quindi corrispondere il punto $\sigma'(1)$, che appartiene a $p^{-1}(x_0)$. Quindi la cardinalità delle fibre (cioè l'ordine del rivestimento) è uguale all'indice di $p_\sharp\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ in $\pi_1(X, x_0)$.

AUTOMORFISMI DI RIVESTIMENTO

Se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento, si definisce *automorfismo di rivestimento* di p ogni omeomorfismo $\Phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tale che $p \circ \Phi = p$. Gli automorfismi di rivestimento sono quindi omeomorfismi dello spazio totale che lasciano invariate le fibre di ogni punto dello spazio base, cioè $\Phi(p^{-1}(x)) = p^{-1}(x)$, operando quindi una permutazione sui punti di ogni fibra. L'insieme degli automorfismi di rivestimento di p viene indicato con $\mathrm{Aut}(p)$, che risulta essere un gruppo rispetto alla composizione.

Teorema 2 *(unicità degli automorfismi di rivestimento) Sia* $x \in p^{-1}(x_0)$, *allora esiste al più un* $\Phi \in Aut(p)$ *tale che* $\Phi(\tilde{x}_o) = x$.

Teorema 3 *(esistenza degli automorfismi di rivestimento) Sia* $x \in p^{-1}(x_0)$, *allora esiste un* $\Phi \in Aut(p)$ *tale che* $\Phi(\tilde{x}_o) = x$ *se e solo se* $p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_o)\right) = p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, x)\right)$.

Quindi la cardinalità di $\mathrm{Aut}(p)$ è minore o al più eguale all'ordine del rivestimento. Il seguente risultato lega la struttura del gruppo $\mathrm{Aut}(p)$ con quella del gruppo fondamentale dello spazio base X.

Teorema 4 *Sia* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento, allora si ha*

$$\mathrm{Aut}(p) \cong N(H)/H \, ,$$

dove $H = p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ *ed* $N(H)$ *è il normalizzatore di* H *nel gruppo* $\pi_1(X, x_0)$.

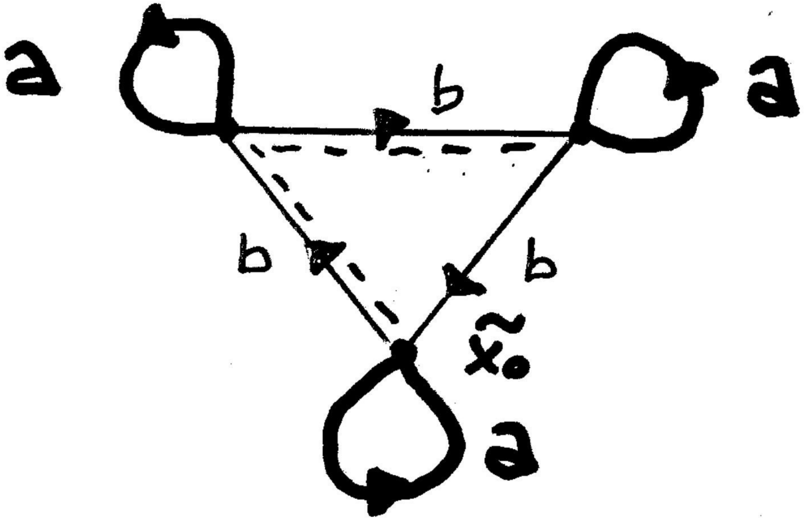
Definizione Un rivestimento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ si dice *regolare* se $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$.

Tutti i rivestimenti doppi (cioè di ordine due) sono regolari; infatti ogni sottogruppo di indice due è normale. Ovviamente, ogni rivestimento di uno spazio avente gruppo fondamentale abeliano (per esempio, un qualunque gruppo topologico) è regolare.

È ovvio che se p è regolare, esiste una biezione naturale fra $\mathrm{Aut}(p)$ e la fibra $p^{-1}(x_0)$, quindi la cardinalità di $\mathrm{Aut}(p)$ coincide con l'ordine del rivestimento.

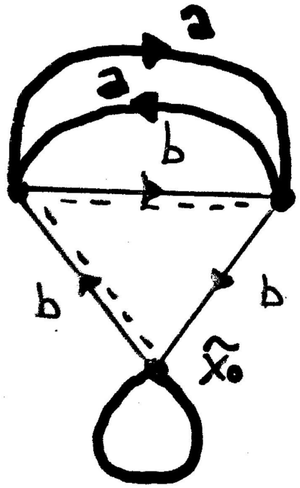
Un'altra proprietà che caratterizza i rivestimenti regolari è la seguente: i sollevamenti rispetto a p di un dato cappio ω basato in x_0, che sono tanti quanti sono i punti della fibra $p^{-1}(x_0)$, o sono tutti cappi o sono tutti archi.

♠ Un rivestimento regolare triplo dello spazio "ad otto" è:



$$H = \langle a, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, b^3\rangle, \quad \mathrm{Aut}(p) \cong \mathbf{Z}_3$$

♠ Un rivestimento non regolare triplo dello spazio "ad otto" è:



$$H = \langle a, bab^{-2}, b^2ab^{-1}, b^3\rangle, \quad \mathrm{Aut}(p) = \{ \mathrm{Id}\}$$

Teorema 5 *Se* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *è un rivestimento regolare, allora:*

(i) $\mathrm{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0)/p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$;

(ii) $X \cong \tilde{X}/\mathrm{Aut}(p)$.

Corollario 1 *Se* $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *è un rivestimento universale, allora:*

$$\mathrm{Aut}(\tilde{p}) \cong \pi_1(X, x_0) ,$$

e l'isomorfismo è dato dalla mappa $\chi_{\tilde{p}} : \mathrm{Aut}(\tilde{p}) \to \pi_1(X, x_0)$, *dove* $\chi_{\tilde{p}}(\Phi)$ *e rappresentato dal cappio* $\omega = \tilde{p}(\omega')$, *essendo* ω' *un qualunque cammino da* $\tilde{x}_0$ *a* $\Phi(\tilde{x}_0)$. *Inoltre si ha*

$$X \cong \tilde{X}/\mathrm{Aut}(\tilde{p}).$$

$p: (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, 1)$

$t \longmapsto e^{it}$

$$\begin{tikzcd}
& \Phi \in \mathrm{Aut}(p) \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
2\pi\mathbb{Z} = p^{-1}(\{1\}) = \Phi(0) & & {[p(\omega')] \in \pi_1(S^1, 1)}
\end{tikzcd}$$

$\omega'(0) = 0 \quad \omega'(1) = \Phi(0)$

$2\pi \longleftrightarrow \tau$ traslazione di un vettore $\longleftrightarrow \partial :$  1

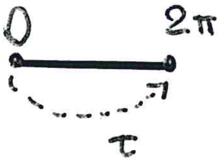
generatore di $\pi_1(S^1, 1)$

$\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\tau(t) = t + 2\pi$

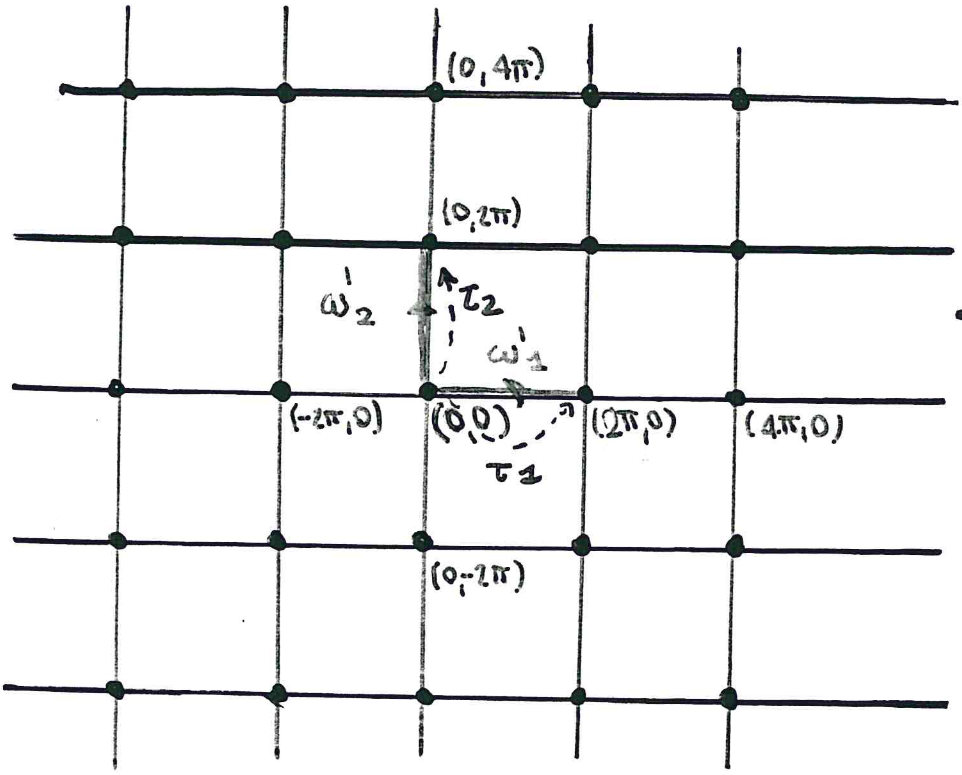
$\mathrm{Aut}\, p = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}$

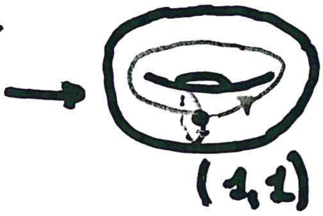
$[0,2\pi]\big/ = \mathbb{R}\big/\mathrm{Aut}(p) \cong S^1$



$\tau(0) = 2\pi$

$$p:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},(0,0))\longrightarrow(S^1\times S^1,(1,1))=(T,(1,1))$$
$$(t,s)\longmapsto(e^{it},e^{is})$$





FIBRA di $(1,1)$
$\{(2\pi k,2\pi h)\ h,k\in\mathbb{Z}$

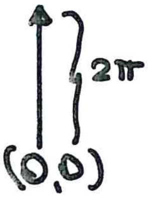
$\pi_1(T,(1,1))=\langle a\rangle\oplus\langle b\rangle$

- $(2\pi,0)\longleftrightarrow\tau_1$ traslazione di un vettore $\longleftrightarrow a$:

$$\tau_1:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(t,s)\longmapsto(t+2\pi,s)$$

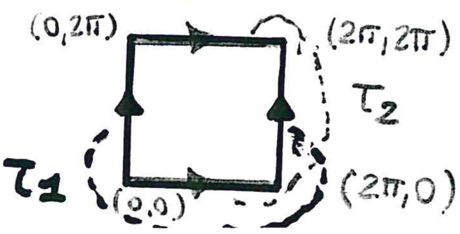
- $(0,2\pi)\longleftrightarrow\tau_2$ traslazione di un vettore $\longleftrightarrow b$:

$$\tau_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(t,s)\longmapsto(t,s+2\pi)$$

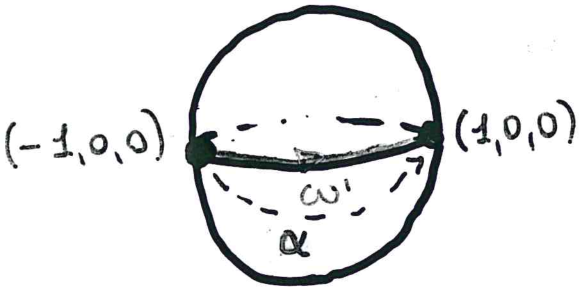


$$\mathrm{Aut}\,p=\langle\tau_1\rangle\oplus\langle\tau_2\rangle\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{R}^2/\mathrm{Aut}(p)=\frac{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}{\sim}\cong T$$



$$p : (S^2, (1,0,0)) \longrightarrow (\mathbb{RP}^2, [1,0,0])$$
$$(x,y,z) \longmapsto [x,y,z]$$



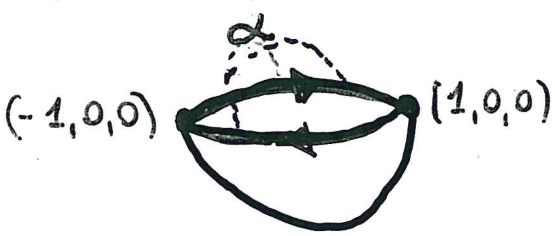
$$\longrightarrow \mathbb{RP}^2$$

$$(-1,0,0) \longleftrightarrow \alpha : S^2 \to S^2 \longleftrightarrow a = [p(\omega')]$$
$$(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$$

FIBRA DI $[1,0,0]$
È $\{(1,0,0),(-1,0,0)\}$

$$\mathrm{Aut}(p) = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathbb{RP}^2, [1,0,0])$$

$$S^2/_{\mathrm{Aut}\,p} = D^2/_{\sim} \cong \mathbb{RP}^2$$



Esempio: gli spazi proiettivi reali

- Per $n > 1$, lo spazio proiettivo reale $\mathbf{RP^n}$ ha gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{RP^n}) \cong \mathbf{Z_2}$. Allora $\mathbf{RP^n}$ ha come spazî di rivestimento se stesso (per $H = \pi_1(\mathbf{RP^n})$) e lo spazio di rivestimento universale $\mathbf{S^n}$ (per $H = 0$). In quest'ultimo caso il gruppo degli automorfismi di rivestimento risulta essere $\mathrm{Aut}(p) = \{\mathrm{Id}, \alpha\}$, dove $\alpha : \mathbf{S^n} \longrightarrow \mathbf{S^n}$ è la mappa antipodale definita da $\alpha(x) = -x$.

Sia $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento universale, K un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\tilde{p})$ e $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/K$ la proiezione canonica, allora la mappa $p : (\tilde{X}/K, \pi(\tilde{x}_0)) \to (X, x_0)$ tale che $\tilde{p} = p \circ \pi$, risulta essere un rivestimento. Se poi $p : (X', x'_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento qualunque e K è il sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\tilde{p})$ tale che $\chi_{\tilde{p}}(K) = p_\sharp(\pi_1(X', \tilde{x}'_0))$, allora $X' \cong \tilde{X}/K$. Quindi ogni rivestimento di B si ottiene come quoziente del suo rivestimento universale rispetto ad un opportuno gruppo di automorfismi di rivestimento.

Definizione Un gruppo G di omeomorfismi di uno spazio topologico X si dice *propriamente discontinuo* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $g(U) \cap U = \emptyset$, per ogni $g \in G - \{Id_X\}$.

Indichiamo due classi significative di gruppi propriamente discontinui:

- gruppi finiti di omeomorfismi di spazi di Hausdorff tali che ogni elemento diverso dall'identità è privo di punti fissi;
- gruppi di automorfismi di rivestimento.

Teorema 6 *Se G è un gruppo propriamente discontinuo di omeomorfismi di uno spazio topologico X, allora, per ogni $x \in X$, la proiezione a quoziente $\pi : (X, x) \to (X/G, \pi(x))$ è un rivestimento regolare e $G =$Aut(π).*

Corollario 2 *Se X è semplicemente connesso e G è un gruppo propriamente discontinuo di omeomorfismi di X, allora:*

$$\pi_1(X/G) \cong G.$$

Esempio: gli spazi lenticolari

Si consideri la sfera tridimensionale $\mathbf{S^3} = \{(z_0, z_1) \in \mathbf{C^2} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, e sia $\Phi_{p,q} : \mathbf{S^3} \to \mathbf{S^3}$ l'omeomorfismo definito da $\Phi_{p,q}(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi q i/p} z_1)$, dove p e q sono interi positivi primi fra loro con $p > q$. Allora il gruppo ciclico $G_{p,q}$ degli omeomorfismi di $\mathbf{S^3}$ generati da $\Phi_{p,q}$ ha ordine p ed è propriamente discontinuo (si osservi che gli omeomorfismi non identici di $G_{p,q}$ sono privi di punti fissi). Lo spazio quoziente $L(p,q) = \mathbf{S^3}/G_{p,q}$ è detto *spazio lenticolare* e risulta essere sempre una varietà di dimensione tre. Si noti che, essendo $\Phi_{2,1}$ la mappa antipodale, lo spazio lenticolare $L(2,1)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale $\mathbf{RP^3}$. Siccome $\mathbf{S^3}$ è semplicemente connessa, si ha $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbf{Z_p}$. Questo implica che se $L(p', q')$ è omeomorfo a $L(p,q)$ allora necessariamente $p' = p$. Gli spazi lenticolari sono stati completamente classificati da Reidemeister nel 1932:

$$L(p, q') \cong L(p, q) \quad \Longleftrightarrow \quad q' \equiv \pm q^{\pm 1} \ mod \ p.$$