

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Corso di Laurea in INGEGNERIA ENERGETICA

Tesi di laurea in GEOMETRIA E ALGEBRA

**Analisi della ripartizione della
potenza elettrica nelle reti di
trasmissione e del suo funzionamento**

RELATORE:

CANDIDATO:

Chiar.mo Prof. Massimo Ferri

Federico Alpi

CORELATORE:

Prof. Alberto Borghetti

Anno Accademico 2016/2017 Sessione I

A Giovanni

Indice

1	Strumenti matematici	3
1.1	Tipologia di Matrici	3
1.2	Operazioni tra Matrici	7
1.3	Determinante di una Matrice	9
1.3.1	Esempi di determinanti	9
1.3.2	Alcune proprietà	10
1.3.3	Teorema di Laplace	10
1.4	Matrice Inversa	11
1.5	Risoluzione di sistemi lineari	12
2	Linee di trasmissione	13
2.1	Storia dell'elettricità	13
2.2	Produzione di energia elettrica	14
2.3	Rete elettrica di trasmissione in Italia	15
2.4	Caratteristiche fisiche delle reti elettriche	16
3	Analisi Ingegneristica	19
3.1	Introduzione al problema	19
3.2	Descrizione tecnica della potenza di rete	20
3.3	Approssimazione in corrente continua dei flussi di potenza	23
3.4	Analisi matriciale del problema	25
3.5	Esempio teorico del problema	29
3.6	Risoluzione numerica di sistemi di equazioni lineari	33
3.6.1	Metodo di risoluzione di Gauss-Banachiewicz	34
3.7	Esempio della risoluzione con Gauss-Banachiewicz	38
4	Esercizio pratico del problema	41
4.1	Esempio con 5 nodi	41
4.1.1	Risoluzione con Gauss-Banachiewicz	47
	Bibliografia	55

Introduzione

L'energia elettrica è un benessere capace di soddisfare gran parte dei nostri bisogni vitali. Fin dalla sua introduzione lo stile di vita dell'uomo è stato stravolto ed ora la società non può più farne a meno. Senza di essa la produzione industriale si fermerebbe, il mondo si fermerebbe. In via precauzionale il mondo tecnologico di oggi ha sviluppato sistemi di distribuzione dell'energia elettrica assai avanzati tali da rendere raro un'evento come il *black out*. Insieme alla nascita di una rete di distribuzione nasceva anche il Mercato elettrico regolato dalle leggi dell'economia dei contratti. La discrepanza fra il comportamento naturale della corrente elettrica e quello artificiale dei contratti ha reso necessaria la conoscenza dei flussi di potenza elettrica attraverso la rete magliata per evitare guasti dovuti ad un'eccessiva quantità di potenza passante attraverso una linea. L'obiettivo principale di questa tesi è quello di indagare sulla natura della potenza elettrica studiando i fattori direttamente ed inversamente proporzionali ad essa con il fine di applicare la sua topologia di distribuzione all'interno di un'esercitazione pratica. Un secondo obiettivo parallelo al primo è quello di trovare un metodo di risoluzione algebrico alternativo a quello proposto a lezione per il calcolo della ripartizione dei flussi di potenza nelle linee elettriche. Nel primo capitolo sono descritti gli strumenti matematici utilizzati per la trattazione e risoluzione del problema. Nel secondo capitolo sono esposte la storia e le caratteristiche delle linee di trasmissione di potenza elettrica. I primi due capitoli fungono da introduzione per il capitolo 3 dove viene trattata prima l'analisi dei componenti del problema poi l'approccio al problema stesso proponendo un secondario metodo matematico di risoluzione. Nel capitolo 4 viene mostrato un esempio pratico di calcolo della ripartizione di potenza attraverso entrambi i metodi trattati nel capitolo 3.

Capitolo 1

Strumenti matematici

I riferimenti per questo capitolo è la fonte [1]. In questo capitolo vengono trattati gli strumenti matematici e i teoremi, utili a comprendere il problema da un punto di vista matematico.

1.1 Tipologia di Matrici

Definizione 1. Dato un insieme K , una matrice è definita come una funzione

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow K$$

dove m ed n sono interi positivi fissati; essa viene detta di tipo $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A]_{m,1} & [A]_{m,2} & \cdots & [A]_{m,n} \end{pmatrix}$$

Indicando con $[A]_{i,j}$ l'elemento corrispondente alla coppia (i,j) ; i viene chiamato *indice di riga* e j viene chiamato *indice di colonna*.

Chiamiamo *riga* (risp. *colonna*) ogni n -pla composta dagli elementi con fissato indice di riga (risp. colonna). La matrice è composta da righe e da colonne che vanno rispettivamente da 1 a m e da 1 a n . Gli elementi $[A]_{i,i}$ costituiscono la *diagonale principale*.

Definizione 2. Una matrice viene detta *quadrata di ordine n* se ha un numero di righe m uguale al numero di colonne n .

Definizione 3. Una matrice $D = (d)_{i,j}$ quadrata di ordine n è definita *diagonale* se $d_{i,j} = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \ i \neq j$. Ad esempio, la matrice riportata di seguito

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è la } \textit{matrice identità} \text{ che è anche diagonale.}$$

Definizione 4. Presa una matrice generica A , si definisce una *matrice trasposta* A^T , la matrice il cui generico elemento di posizione (i,j) è l'elemento con indici (j,i) della matrice originaria. Perciò, $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.

$$\text{Ad esempio, se } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ allora } A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Definizione 5. Posta A^T la matrice trasposta di A , una matrice A è detta *simmetrica* quando $A^T = A$. Nel caso della matrice identità si ha che $I = I^T$ dato che tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale principale sono uguali a 0; quindi la matrice identità, così come ogni matrice diagonale, è simmetrica.

Definizione 6. La matrice dei cofattori di una matrice quadrata A di ordine n , detta anche matrice dei complementi algebrici, è una matrice quadrata di ordine n il cui elemento nella posizione generica i,j è il *cofattore* di A relativo alla posizione i,j definito come segue :

$$\text{cof}_{i,j}(A) := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

dove il termine $\det(A_{i,j})$ rappresenta il *minore* di A ottenuto cancellando riga i -esima e la colonna j -esima.

La matrice viene in seguito espressa come :

$$\mathit{cof} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathit{cof}_{1,1}(A) & \cdots & \mathit{cof}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathit{cof}_{n,1}(A) & \cdots & \mathit{cof}_{n,n}(A) \end{pmatrix}$$

Schema mnemonico della variazione del segno :

$$(-1)^{i+j} \longrightarrow \begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definizione 7. Viene chiamata *matrice aggiunta* la trasposta della matrice dei cofattori:

$$\mathit{adj}(A) = (\mathit{cof} A)^T$$

Ad esempio, data A matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

La sua matrice *aggiunta* è definita come segue nella pagina successiva \longrightarrow

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{11} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Inserendo i numeri, in questo caso viene restituita la matrice

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

1.2 Operazioni tra Matrici

Definizione 1. Due matrici entrambe di tipo $m \times n$ possono essere sommate tra di loro.

La loro somma $A + B$ è definita come

$$[A + B]_{i,j} := [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

cioè, la matrice $m \times n$ i cui elementi sono la somma degli elementi delle due matrici aventi la stessa posizione. Ad esempio:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{allora } \longrightarrow [A + B] = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definizione 2. La moltiplicazione tra due matrici A e B è possibile se esse sono di tipo $m \times p$ e $p \times n$ ovvero il numero p di colonne di A deve essere uguale al numero p di righe di B . Il risultato è una matrice C di tipo $m \times n$.

$$\text{Ad esempio se } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{allora } \longrightarrow C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando una matrice 2×3 per una 3×3 si ottiene una matrice 2×3 .

Il generico elemento $[C]_{r,s}$ è definito come il prodotto scalare naturale della r -esima riga di A per la s -esima colonna di B .

$$[C]_{1,1} = (1 \times 1) + (0 \times 0) + (-1 \times 0) = 1$$

$$[C]_{1,2} = (1 \times 1) + (0 \times 1) + (-1 \times -2) = 3$$

$$[C]_{1,3} = (1 \times 2) + (0 \times 4) + (-1 \times 3) = -1$$

$$[C]_{2,1} = (1 \times 1) + (2 \times 0) + (2 \times 0) = 1$$

$$[C]_{2,2} = (1 \times 1) + (2 \times 1) + (2 \times -2) = -1$$

$$[C]_{2,3} = (1 \times 2) + (2 \times 4) + (2 \times 3) = 16$$

Il risultato del prodotto di matrici è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

Normalmente si omette il segno \times di moltiplicazione.

Definizione 3. Data una matrice A ed uno scalare c , il prodotto per scalare si ottiene costruendo una nuova matrice $A \cdot c$ tale che:

$$[c A]_{i,j} := c [A]_{i,j}$$

cioè moltiplicando per c ogni elemento di A .

$$\text{Ad esempio, } 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & -2 \times 3 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.3 Determinante di una Matrice

In algebra, il determinante di una matrice quadrata è un numero che ne descrive proprietà geometriche e algebriche. In particolare, in una trasformazione lineare del piano cartesiano descritta da una matrice quadrata 2×2 il determinante della matrice stessa fornisce informazioni sulla trasformazione:

1. il *valore assoluto* rappresenta l'area del trasformato di un quadrato di lato unitario
2. il *segno* ne descrive l'orientazione.

Viene generalmente indicato con $\det(A)$ o con $|A|$ ed è definito come:

$$\det(A) := \sum_{p \in S} \text{sign}(p) a_{p(1)}^1 \cdot \dots \cdot a_{p(n)}^n$$

dove S è l'insieme di tutte le permutazioni di $\{1, \dots, n\}$ e $\text{sign}(p)$ è il segno della permutazione p .

1.3.1 Esempi di determinanti

Determinante di una matrice di ordine 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

Determinante di una matrice di ordine 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

1.3.2 Alcune proprietà

Se tutti gli elementi di una riga o colonna sono nulli allora $\det(A) = 0$.

Se la matrice A contiene due righe o colonne uguali o proporzionali allora $\det(A) = 0$.

Se e solo se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne) $\det(A) = 0$.

1.3.3 Teorema di Laplace

Introduco il seguente teorema che viene utilizzato nel *Capitolo 4* per il calcolo della matrice B_r .

Il *teorema di Laplace* o *sviluppo di Laplace* è una formula che consente di calcolare il determinante di una matrice quadrata attraverso un procedimento ricorsivo che può essere eseguito per righe oppure per colonne.

Se considero una matrice quadrata M di dimensione n ed elementi $m_{i,j}$ il primo *teorema di Laplace* afferma che il determinante della matrice M è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga qualsiasi (o una colonna qualsiasi) per i rispettivi complementi algebrici. In formule questo si traduce come segue :

$$\det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det M_{ij}$$

dove la matrice M_{ij} è la sottomatrice di dimensione $n-1$ che si ottiene da M cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna ed m_{ij} è l'elemento della matrice M in posizione i, j . Il valore $\det M_{ij}$ è detto *minore complementare* dell'elemento (i, j) .

1.4 Matrice Inversa

Una matrice quadrata $A_{n \times n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $B_{n \times n}$ tale che:

$$AB = BA = I_n$$

dove I_n è la matrice identità $n \times n$. In tal caso, B è univocamente determinata da A ed è chiamata matrice inversa di A indicata con A^{-1} .

Data una matrice

$$A = \begin{pmatrix} [A]_{1,1} & \cdots & [A]_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A]_{m,1} & \cdots & [A]_{m,n} \end{pmatrix}$$

la sua inversa A^{-1} è data da :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{cof } A)^T$$

Ad esempio data una matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la sua inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

1.5 Risoluzione di sistemi lineari

In questa sezione avviso il lettore che la teoria della risoluzione dei sistemi lineari ed il metodo di *Gauss-Banachiewicz* vengono interamente trattati nel *Capitolo 3* in particolare nelle *sezioni 3.6 e 3.6.1* in prossimità della loro applicazione al problema. Ho ritenuto opportuno esporre solamente in seguito questi sistemi di risoluzione in quanto la loro applicazione interessa direttamente il problema del *Capitolo 3*.

Capitolo 2

Linee di trasmissione

La fonte di questo capitolo è quella corrispondente al [3]. Nel medesimo vengono trattate le caratteristiche fisiche delle linee di trasmissione con un cenno anche alla produzione ed alla storia dell'energia elettrica.

2.1 Storia dell'elettricità

L'elettricità viene definita come una proprietà fondamentale della materia che in natura si manifesta ad esempio attraverso uno dei più comuni fenomeni quali i fulmini. L'uomo è sempre stato attratto da questa forma di energia *misteriosa* ed ha cercato nel corso dei secoli, di indagare sulla sua natura per poterla poi governare e sfruttare nel modo più efficiente possibile.

Il 19^{esimo} secolo ha visto molti scienziati fare importanti progressi nel campo dell'elettricità come *Faraday* che nel 1830 costruì il primo generatore elettromagnetico di corrente elettrica e *Nikola Tesla* che nel 1893 realizzò la prima trasmissione a distanza tramite le onde radio.

Tuttavia al 20^{esimo} fu attribuito il nome del secolo dell'elettricità per le molteplici scoperte che insieme all'introduzione dell'elettronica e dei computer hanno portato ad una netta impennata della qualità media di vita prima nell' Occidente Europeo poi in tutto il Mondo.

2.2 Produzione di energia elettrica

La produzione dell'energia elettrica è la prima fase del sistema che ha come obiettivo la distribuzione dell'energia elettrica. In genere, la produzione di energia elettrica avviene per conversione di una fonte di energia attraverso le centrali elettriche.

Inizialmente in Italia, negli anni 60, la produzione avviene mediante l'utilizzo di fonti energetiche non rinnovabili quali carbone petrolio e gas naturale. Infatti dal grafico sottostante si può vedere come la linea *arancione* rappresentante gli impianti termoelettrici costituisca il 50 % della produzione nel '67. Con il passare degli anni l'aumento della produzione di energia da parte di impianti termoelettrici è stata costante fino a raggiungere circa il 60 % nel 2010 prima di subire un'inclinazione di tendenza.

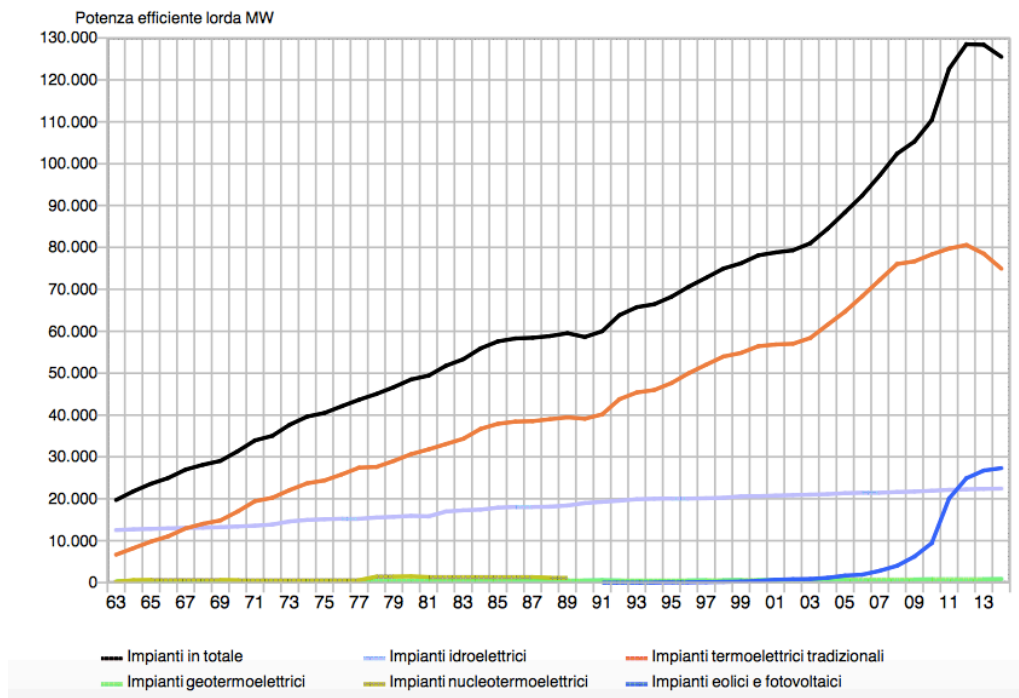


Figura 2.1: Potenza efficiente lorda degli impianti elettrici di generazione dal 1963 al 2013 ^[1]

Questo calo di produzione è giustificato dall'introduzione di impianti eolici e fotovoltaici che dal 2007 al 2013 hanno visto un forte incremento di produzione di potenza passando da una cifra irrisoria fino ad un 20 – 23 % della produzione totale. Per quanto riguarda gli impianti idroelettrici essi hanno mantenuto un incremento costante nel tempo raggiungendo il 20 % della produzione nel 2013. *Immaginando* di proiettare il grafico al 2030 l'interesse comune è quello di vedere incrementare sempre più la produzione da fonti rinnovabili come eolico e fotovoltaico e vedere ridurre il più possibile l'uso di combustibili fossili.

2.3 Rete elettrica di trasmissione in Italia

La trasmissione dell'energia elettrica è la fase intermedia tra la produzione e la distribuzione agli utenti e si compone di una infrastruttura di rete di trasmissione ad alta tensione *AAT* che arriva a 380 kV di corrente alternata. La scelta di trasportare corrente ad *altissima* tensione è finalizzata alla riduzione degli sprechi di energia per dissipazione dovuti all'*effetto joule*.

La rete elettrica di trasmissione è connessa a quella di distribuzione mediante cabine elettriche di trasformazione che altro non sono che trasformatori che hanno il compito di abbassare il valore della tensione senza modificare la potenza trasmessa. La rete di trasmissione italiana realizza un completo parallelo magliato con 20.581 km di linee elettriche in *AAT* (380/220 kV) e circa 298 stazioni di trasformazione a 380 kV e 220 kV. La linea più lunga è la Matera–S. Sofia (218 km). La rete a 380 kV integra e man mano sostituisce la preesistente rete a 220 kV, collegando le centrali fra loro e con i centri di consumo. Anche la Sicilia è in parallelo con la rete nazionale attraverso un collegamento in cavo in corrente alternata.

Il collegamento con la Sardegna è ora realizzato per mezzo di un collegamento in corrente continua a 200 kV triterminale con cavo sottomarino dalla Toscana attraverso la Corsica (SACOI) e dal nuovo collegamento di 1000 MW fra Sardegna e Lazio a 500 kV (SAPEI) lungo 435 km.

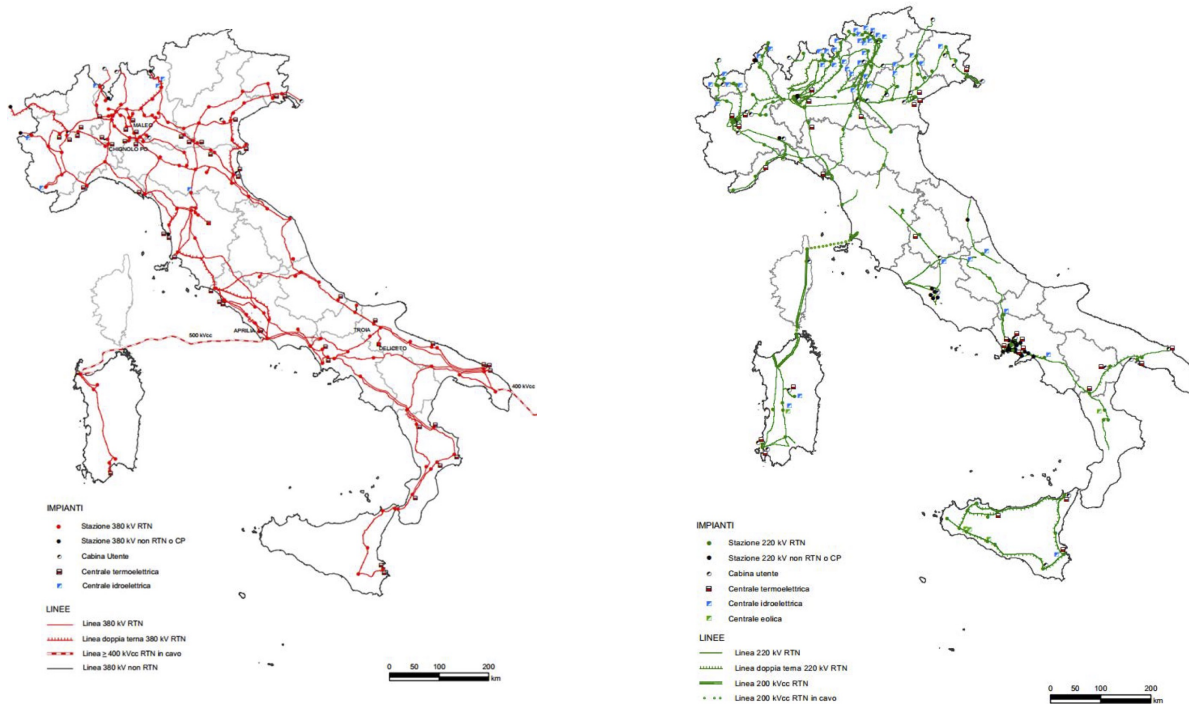


Figura 2.2: Configurazione della rete elettrica di trasmissione italiana a 380 kV—*rossa* e 220 kV—*verde* [2]

2.4 Caratteristiche fisiche delle reti elettriche

L'utilizzazione dell'elettricità per illuminazione richiede che la frequenza sia non inferiore a 42 Hz così da non provocare variazione dell'intensità luminosa delle lampade apprezzabile dall'occhio umano.

Osserviamo inoltre che al crescere della frequenza

1. aumentano in maniera diretta sia le cadute di tensione che si hanno lungo le linee e nel macchinario elettrico, sia le perdite d'energia nel ferro per isteresi e correnti parassite;
2. diminuiscono le dimensioni e quindi il costo del macchinario.

Per tutti questi motivi il valore attuale di frequenza è di 50 Hz in Europa e nei paesi d'influenza tecnica europea e di 60 Hz negli Stati Uniti e nei paesi che gravitano attorno all'industria elettrica americana. A conferma della diversa importanza dei fattori sopraindicati osserviamo che a bordo dei mezzi mobili nei quali è prevalente il vantaggio del guadagno di peso rispetto a quello della cadute di tensione e dell'onere delle perdite, si impiegano frequenze maggiori di quella industriale, dell'ordine di 300-400 Hz.

Gli avvolgimenti primari e secondari del trasformatore di consegna possono essere configurati a stella o a triangolo. Il sistema più usato nel mondo e anche in Italia è il triangolo–stella. In questa configurazione il centro stella del secondario, chiamato neutro, viene collegato a un impianto di dispersione nei pressi del trasformatore e poi consegnato alle abitazioni assieme a una delle tre fasi. In un sistema trifase a 400 V, la tensione presente tra fase e neutro è di 230 V. Agli utilizzatori maggiori come laboratori o industrie, vengono consegnate tutte e tre le fasi più il neutro.

Capitolo 3

Analisi Ingegneristica

Per questo capitolo la fonte utilizzata corrisponde al [2]. Le conoscenze dai primi due capitoli acquisite vengono qui applicate per affrontare il problema da un punto di vista ingegneristico.

3.1 Introduzione al problema

La produzione di energia elettrica viene affidata a centrali che sfruttano varie fonti di energia finalizzata alla produzione di potenza elettrica. Questa potenza elettrica viene gestita dal mercato elettrico che definisce gli scambi fra produttori e consumatori di energia elettrica. La natura artificiale dei contratti economici diverge dalla natura della corrente elettrica il cui comportamento è descritto dalle Leggi della Fisica. Per questo motivo i flussi di potenza si valutano mediante le equazioni delle reti elettriche e non da considerazioni economiche; diviene perciò necessario riuscire a misurare, controllare e governare i flussi di potenza nelle linee elettriche e verificare la presenza di *linee congestionate* definite come linee in cui la potenza trasmessa è maggiore della potenza massima di trasmissione delle linee stesse. Nel *Capitolo 3* sono mostrate la teoria e le formule che consentono di stimare il flusso di potenza elettrica che passa attraverso due nodi (h e k) con il fine di poter calcolare attraverso strumenti matematici la ripartizione delle potenze.

Come introduzione al problema incomincio analizzando la natura della potenza elettrica prodotta e poi trasmessa da un' alternatore in rete e le caratteristiche fisiche delle linee elettriche.

3.2 Descrizione tecnica della potenza di rete

L'alternatore è una macchina elettrica rotante basata sulla Legge Fisica dell'induzione elettromagnetica che converte energia meccanica fornita dal motore primo ad esempio da turbine a gas, in energia elettrica sotto forma di corrente alternata. Questo processo, denominato conversione elettromeccanica dell'energia, coinvolge la formazione di campi magnetici che agiscono come mezzo intermedio. La conversione elettromeccanica dell'energia è molto efficiente, con rendimenti normalmente prossimi al 100 %.

La rete elettrica è per la maggior parte, alimentata da alternatori, poichè tali generatori costituiscono il mezzo di conversione di energia presente nelle principali centrali elettriche. La struttura meccanica dell'alternatore fa sì che la potenza trasmessa in rete sia trifase ovvero, costituita da tre fasi sfasate tra di loro di 120° . Le espressioni della tensione e della corrente di una fase sono :

$$\text{Tensione di fase} \implies v_a = \sqrt{2} \cdot |V| \cdot \cos(\omega_0 t + \angle V_a) \quad (3.1)$$

$$\text{Corrente di fase} \implies i_a = \sqrt{2} \cdot |I| \cdot \cos(\omega_0 t + \angle I_a) \quad (3.2)$$

dove $|V|$ e $|I|$ sono i moduli rispettivamente della tensione e della corrente, ω_0 è la *pulsazione*, t è il tempo mentre $\angle V_a$ e $\angle I_a$ sono gli angoli di sfasamento della tensione e corrente rispetto a quelli del generatore.

La potenza elettrica iniettata in rete è formata da una componente *attiva* (P) ed una *reattiva* (Q) che insieme costituiscono la potenza *complessa* (S) descritta dalla relazione:

$$S = P + j Q$$

L'espressione della potenza di fase è :

$$P_a(t) = v_a \cdot i_a$$

che, considerando le (3.1) e (3.2) diventa

$$P = |V| \cdot |I| \cdot \cos(\varphi) + |V| \cdot |I| \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 t + \angle V_a + \angle I_a)$$

dove φ rappresenta l'angolo di sfasamento tra v_a e i_a :

$$\varphi = \angle V_a - \angle I_a \quad (3.3)$$

Sommando le tre fasi si ottiene l'espressione della *potenza attiva e reattiva trifase* :

$$P(t) = P_a + P_b + P_c = 3 \cdot |V| \cdot |I| \cdot \cos(\varphi) \quad (3.4)$$

$$Q(t) = Q_a + Q_b + Q_c = 3 \cdot |V| \cdot |I| \cdot \sin(\varphi)$$

L'espressione della *potenza complessa trifase* è :

$$S(t) = 3 \cdot |V| \cdot |I| \cdot \cos(\varphi) + j \cdot 3 \cdot |V| \cdot |I| \cdot \sin(\varphi)$$

La resistenza che incontra la corrente elettrica che scorre nelle linee è direttamente proporzionale alla tensione ed inversamente proporzionale alla corrente di linea come descritto dalla *Legge di Ohm* \rightarrow " $V = R \cdot I$ ".

La resistenza è caratterizzata da una duplice natura in modo analogo alla potenza di rete tale per cui non si parla di resistenza ma di *Impedenza* che è costituita da due fattori:

1. la Resistenza (R_{hk}), parte reale dell'Impedenza
2. la Reattanza (X_{hk}), parte immaginaria dell'Impedenza

Resistenza e Reattanza sono legate dalla seguente relazione:

$$Z_{hk} = R_{hk} + j \cdot X_{hk} \quad (3.5)$$

Inserisco ora il circuito equivalente di un tratto di linea compresa tra due nodi h e k che utilizzo per poter scrivere l'equazione che descrive il transito di potenza elettrica in un determinato istante.

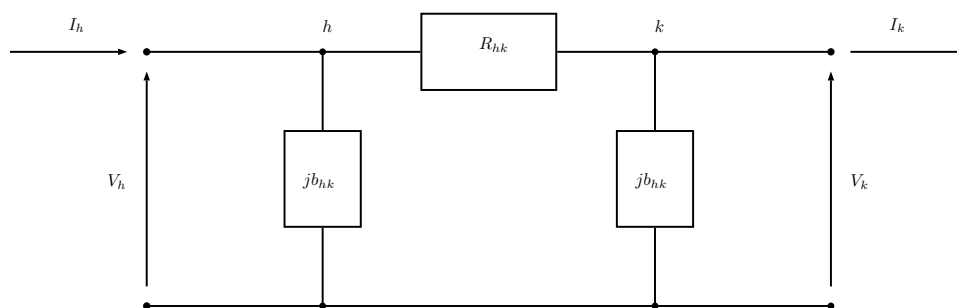


Figura 3.1: *Circuito equivalente della linea elettrica tra il nodo h e il nodo k* ^[3]

Nel circuito equivalente illustrato si nota la corrente in ingresso I_h , quella in uscita I_k e le rispettive tensioni V_h e V_k . In rappresentanza alla resistenza di linea si ha R_{hk} e jb_{hk} che è un' *ammettenza* dove $b = \omega_0 C$. Questo sintetico schema viene utilizzato per costruire l'equazione (3.6) che utilizzo per calcolare i flussi di potenza. La (3.6) viene introdotta nel seguente sottocapitolo.

3.3 Approssimazione in corrente continua dei flussi di potenza

Il calcolo del transito di potenza viene eseguito adottando delle semplificazioni ingegneristiche che rendono maggiormente pratico il calcolo senza influenzare la struttura del problema. La comprensione del metodo in corrente continua è utile in quanto tale metodo consente la trattazione del problema della ripartizione dei flussi di potenza come problema lineare e non influenza sensibilmente il risultato finale. Per poter comprendere al meglio le semplificazioni adottate occorre per primo definire il concetto di *tensione nominale di un nodo* come la tensione utilizzata per progettare l'impianto elettrico e che serve anche per classificare i vari impianti elettrici che possono essere considerati impianti di bassissima tensione, bassa tensione, media tensione o alta tensione. Inoltre la sigla *p.u.* che è l'abbreviazione di " *per unità* " indica che il valore preso in considerazione è stato diviso per un valore standard che permette di rendere il calcolo più agile. Nel caso della tensione il valore standard è dato dalla tensione nominale e questo rapporto ci permette anche di capire quanto il valore di tensione considerato sia più o meno prossimo a quello della tensione nominale. Ipotesi semplificative :

1. Le tensioni dei nodi vengono considerate nominali $\rightarrow V_h = V_k = V_{nom} = 1$ p.u.
2. Nelle linee in alta tensione il valore della resistenza (R_{hk}) è trascurabile rispetto a quello della reattanza $\rightarrow Z_{hk} \approx X_{hk}$.
3. Le differenze fra gli angoli di fase ϑ delle tensioni ai terminali di ogni linea sono considerate piccole ovvero, di qualche grado.
 $\rightarrow \angle V_h \approx \angle V_k \rightarrow \text{sen}(\angle V_h - \angle V_k) \approx \angle V_h - \angle V_k$

Alla luce di queste tre semplificazioni, la *Potenza di Transito* viene definita come:

$$T_{hk} = \frac{V_{nom}^2}{X_{hk}} \cdot (\angle V_h - \angle V_k) \quad (3.6)$$

Dalla (3.6) si può vedere come la potenza di transito sia direttamente proporzionale alle fasi iniziali e finali $\angle V_h - \angle V_k$ dei nodi h e k ed inversamente proporzionale alla reattanza X_{hk} . Se si ipotizza costante nel tempo la reattanza, che rappresenta una caratteristica statica delle linee, e la tensione nominale che definiamo costante, si vede come nelle reti di trasmissione le differenze fra gli angoli delle fasi delle tensioni alle terminazioni delle linee siano le variabili più determinanti. Dall'equazione (3.6) la tensione nominale può essere eliminata dalla formula dividendo entrambi i membri per una *potenza base* (P_{base}) che consideriamo pari a 100 MW che consente di esprimere la potenza di transito in *per unità* :

$$\begin{aligned} \frac{T_{hk}}{P_{base}} &= \frac{V_{nom}^2}{P_{base} \cdot X_{hk}} \cdot (\angle V_h - \angle V_k) \\ T_{hk,p.u.} &= \frac{1}{X_{hk,p.u.}} \cdot (\angle V_h - \angle V_k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{dove } X_{hk,p.u.} = \frac{X_{hk}}{Z_{base}} \quad \text{e} \quad Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} = \frac{V_{base}^2}{P_{base}}$$

La (3.7) viene detta *equazione dei flussi di potenza con approssimazione in corrente continua* .

È stato finora descritto il problema analizzando nel dettaglio la natura delle correnti elettriche e le caratteristiche fisiche delle linee.

Al fine di rendere il più chiaro e fluido possibile l'esposizione del problema, si descrivono successivamente le ipotesi di partenza del problema ed il suo obiettivo finale.

I dati del problema sono :

1. I valori delle reattanze delle linee elettriche $\rightarrow X_{ij}$
2. Le connessioni che mi descrivono la topologia dei nodi del sistema $\rightarrow A$
3. Il netto delle potenze entranti ed uscenti per ogni nodo del sistema $\rightarrow P_i$

L'obiettivo finale è quello di ricavare attraverso il calcolo matriciale, la ripartizione delle potenze elettriche tra i vari nodi considerati nel problema.

3.4 Analisi matriciale del problema

Utilizzo i dati forniti dal problema per definire le matrici che vengono utilizzate per la risoluzione ;

1. **Matrice delle Connessioni**, definisce le connessioni delle linee e quindi il verso delle potenze.

“ - 1 ” rappresenta la linea che finisce in quel nodo.

“ + 1 ” rappresenta la linea che parte da quel nodo.

$$A = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Matrice degli Angoli di Fase delle Tensioni dei nodi**, definisce le fasi delle tensioni nei vari nodi.

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \angle V_1 \\ \angle V_h \\ \vdots \\ \angle V_k \\ \vdots \\ \angle V_n \end{pmatrix}$$

3. **Matrice diagonale con elementi gli inversi delle reattanze di linea**

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_{12}} & \cdots & & \\ & \ddots & & \\ \vdots & & \frac{1}{X_{hk}} & \vdots \\ & & & \ddots \\ & \cdots & & & \frac{1}{X_{nn}} \end{pmatrix}$$

Dalla (3.7) il **Vettore Colonna di tutti i transiti** di potenza in tutte le linee è dato da:

$$T = \Omega \cdot A \cdot \vartheta \quad (3.8)$$

Sostituendo tutti i membri con le rispettive matrici si ottiene

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_{12}} & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \frac{1}{X_{hk}} & \vdots \\ 0 & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{X_{nn}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \angle V_1 \\ \angle V_h \\ \vdots \\ \angle V_k \\ \vdots \\ \angle V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{hk} \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}$$

In questo modo ho espresso l'equazione che descrive i transiti di potenza (3.7) attraverso una linea utilizzando le matrici che ne descrivono i membri.

Una caratteristica della rete è che il netto della potenza iniettata in rete dai generatori e carichi connessi in un nodo è uguale alla somma delle potenze elettriche entranti o uscenti nel nodo attraverso le linee connesse a quel nodo. Si può quindi scrivere:

$$P_h = \sum_{h,k \neq h} T_{hk} \quad (3.9)$$

La (3.9) scritta in forma compatta diventa:

$$P = A^T \cdot T = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Sostituendo la (3.8) nella (3.10) si ottiene:

$$P = A^T \cdot \Omega \cdot A \cdot \vartheta \quad (3.11)$$

Dalla quale si ricava la **Matrice delle suscettanze nodali della rete** che è definita dalla relazione:

$$B = A^T \cdot \Omega \cdot A \quad (3.12)$$

La matrice delle suscettanze nodali può essere calcolata direttamente dall'ispezione della rete. Infatti, ogni elemento sulla diagonale principale è pari alla somma delle suscettanze dei rami che convergono nel nodo corrispondente e ogni elemento fuori della diagonale è pari alla suscettanza della linea fra i nodi corrispondenti cambiata di segno. La (3.12) rappresenta la soluzione del problema di ripartizione dei flussi di potenza. Note, infatti, le potenze iniettate P , la (3.12) fornisce il vettore degli angoli di fase ϑ e da questi si ricavano i transiti di potenza in ogni linea tramite la (3.8). Occorre però tenere conto che la matrice B è singolare e quindi non può essere invertita. Infatti, possiamo liberamente assegnare la potenza attiva solo in $N-1$ nodi essendo il valore della potenza nel nodo N determinata dal fatto che deve equilibrare quella di tutti gli altri nodi. In un nodo quindi, il valore della potenza iniettata non può essere fissata liberamente. In quel nodo perciò fissiamo come noto l'angolo di fase ponendolo pari a 0. In questo modo gli angoli di fase degli altri nodi sono riferiti al vettore di tensione del nodo N . Il nodo N è detto **nodo di saldo**. Con le approssimazioni introdotte, la scelta del nodo di saldo non ha influenza sui risultati. Una volta fissato il nodo di saldo, determiniamo la matrice delle suscettanze ridotta B_r a partire dalla B , eliminando la riga e la colonna corrispondente al nodo di saldo. La (3.12) diventa:

$$P_r = B_r \cdot \vartheta_r \quad (3.13)$$

essendo P_r e ϑ_r i vettori colonna delle potenze iniettate nei nodi non di saldo ed i corrispondenti angoli di fase.

Fissate le P_r si ottengono gli angoli ϑ_r dalla:

$$\vartheta_r = B_r^{-1} \cdot P_r \quad (3.14)$$

che, inserita nella (3.8) fornisce i transiti di potenza nelle varie linee:

$$T = B_{fr} \cdot B_r^{-1} \cdot P_r \quad (3.15)$$

dove la matrice B_{fr} è ottenuta eliminando la colonna corrispondente al nodo di saldo nella matrice $B_f = \Omega \cdot A$.

Da quest'ultima relazione si definisce la matrice

$$ptdf = B_{fr} \cdot B_r^{-1} \quad (3.16)$$

che è la matrice i cui elementi di ogni colonna forniscono i fattori di distribuzione nelle varie linee della rete, corrispondenti all'indice di riga, della potenza unitaria iniettata nel nodo corrispondente all'indice della colonna considerato. Tale matrice viene detta **matrice dei fattori di distribuzione**, in inglese **ptdf - power transfer distribution factor**.

3.5 Esempio teorico del problema

Si analizza ora un esempio *teorico* di ripartizione di potenza elettrica su tre nodi di cui vengono forniti i valori delle reattanze delle linee x_{12} , x_{13} e x_{23} insieme alle connessioni dallo schema e le potenze nette prelevate o iniettate P_1 , P_2 e P_3 dai rispettivi nodi 1, 2 e 3.

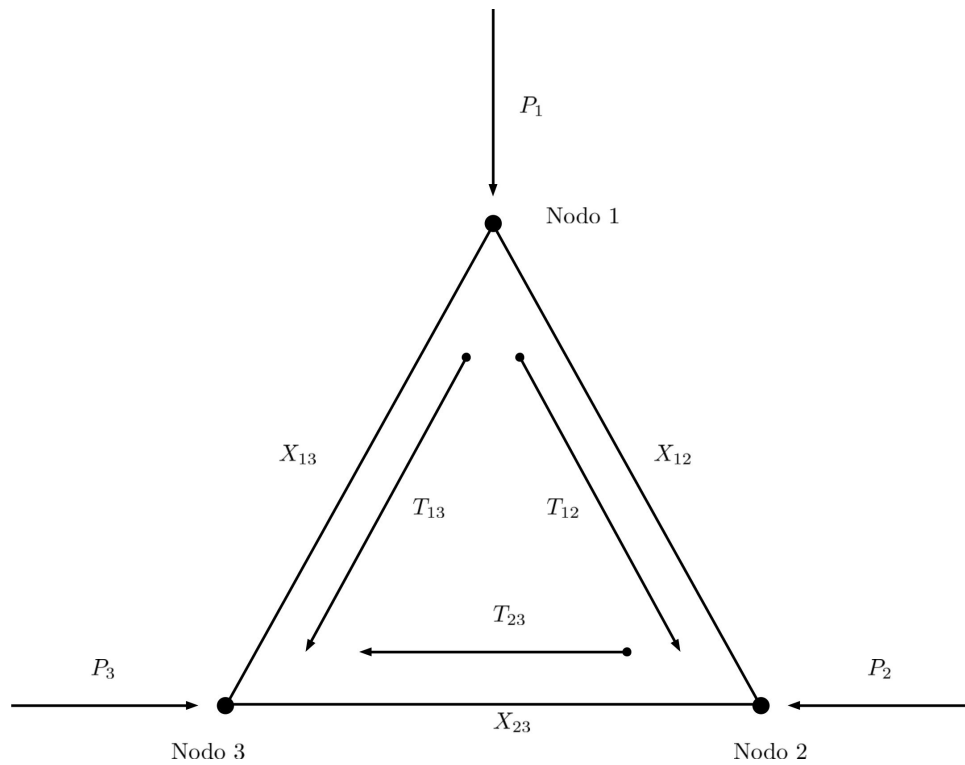


Figura 3.2: *Schema dell'esercizio teorico a tre nodi* ^[4]

Alla luce dei dati del problema, definisco gli elementi utili per la risoluzione di esso incominciando dalla matrice delle connessioni e la sua trasposta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e successivamente quella diagonale con elementi gli inversi delle reattanze

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_{13}} \end{pmatrix}$$

La matrice dei transiti senza le fasi dei nodi è data da $B_f = \Omega \cdot A$

$$B_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{12}} & -\frac{1}{x_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{23}} & -\frac{1}{x_{23}} \\ \frac{1}{x_{13}} & 0 & -\frac{1}{x_{13}} \end{pmatrix}$$

Al fine di ridurre la matrice B_f definisco il nodo 1 come nodo di saldo che mi permette di eliminare la prima colonna della stessa ottenendo la matrice B_{fr}

$$B_{fr} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_{12}} & 0 \\ \frac{1}{x_{23}} & -\frac{1}{x_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{x_{13}} \end{pmatrix}$$

La matrice delle suscettanze è data da $B = A^T \cdot B_f$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{12}} & -\frac{1}{x_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{23}} & -\frac{1}{x_{23}} \\ \frac{1}{x_{13}} & 0 & -\frac{1}{x_{13}} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{x_{12}} + \frac{1}{x_{13}}\right) & -\frac{1}{x_{12}} & -\frac{1}{x_{13}} \\ -\frac{1}{x_{12}} & \left(\frac{1}{x_{12}} + \frac{1}{x_{23}}\right) & -\frac{1}{x_{23}} \\ -\frac{1}{x_{13}} & -\frac{1}{x_{23}} & \left(\frac{1}{x_{13}} + \frac{1}{x_{23}}\right) \end{pmatrix}$$

Elimino ora sia la prima riga che la prima colonna di B corrispondenti al nodo di saldo per ottenere la matrice delle suscettanze nodali ridotta

$$B_r = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{x_{12}} + \frac{1}{x_{23}}\right) & -\frac{1}{x_{23}} \\ -\frac{1}{x_{23}} & \left(\frac{1}{x_{13}} + \frac{1}{x_{23}}\right) \end{pmatrix}$$

Per calcolare la matrice inversa B_r^{-1} determino prima la matrice trasposta dei cofattori che chiamo B_{rc}

$$B_{rc} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{x_{13}} + \frac{1}{x_{23}}\right) & \frac{1}{x_{23}} \\ \frac{1}{x_{23}} & \left(\frac{1}{x_{12}} + \frac{1}{x_{23}}\right) \end{pmatrix}$$

e successivamente il determinante di B_r come segue

$$\det(B_r) = \left(\frac{1}{x_{12}} + \frac{1}{x_{23}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x_{13}} + \frac{1}{x_{23}}\right) - \left(\frac{1}{x_{23}}\right)^2$$

$$\det(B_r) = \frac{1}{x_{12} x_{13}} + \frac{1}{x_{12} x_{23}} + \frac{1}{x_{23} x_{13}} = \frac{x_{23} + x_{13} + x_{12}}{x_{23} \cdot x_{13} \cdot x_{12}}$$

Se il determinante è diverso da 0 la matrice è definita invertibile.

La matrice inversa di B_r è data da $\rightarrow B_r^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot B_{rc}$

$$B_r^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_{12} \cdot (x_{13} + x_{23})}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & \frac{x_{12} \cdot x_{13}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \\ \frac{x_{12} \cdot x_{13}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & \frac{x_{13} \cdot (x_{12} + x_{23})}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \end{pmatrix}$$

Definisco ora la matrice $ptdf$ come $\rightarrow ptdf = B_{fr} \cdot B_r^{-1}$

$$ptdf = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_{12}} & 0 \\ \frac{1}{x_{23}} & -\frac{1}{x_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{x_{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_{12} \cdot (x_{13} + x_{23})}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & \frac{x_{12} \cdot x_{13}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \\ \frac{x_{12} \cdot x_{13}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & \frac{x_{13} \cdot (x_{12} + x_{23})}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \end{pmatrix}$$

$$ptdf = \begin{pmatrix} -\frac{(x_{13} + x_{23})}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & -\frac{x_{13}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \\ \frac{x_{12}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & -\frac{x_{13}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \\ -\frac{x_{12}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} & -\frac{x_{23} + x_{12}}{x_{13} + x_{12} + x_{23}} \end{pmatrix}$$

Vediamo ora come si può trasformare rapidamente il sistema (3.51) nel sistema (3.52) eseguendo opportune combinazioni lineari delle equazioni (3.52) che diano le equazioni (3.51). Noi determineremo i coefficienti e i termini noti delle equazioni (3.52) e contemporaneamente certi numeri m_{pq} ($p, q = 1, 2, \dots, n; p \leq q$) elementi del determinante

$$(3.53) \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

in modo che le equazioni (3.52), moltiplicate per i numeri m_{pq} diano le equazioni (3.51). Più precisamente determiniamo i coefficienti e i termini noti delle equazioni (3.52) rispettivamente per i numeri m_{qi} ($i = 1, 2, \dots, n$) della i^{esima} riga della matrice M (3.53), ottenendo la i^{esima} riga del sistema di equazioni (3.51).

Dev'essere

$$\begin{aligned} a_{iq} &= m_{i1}\alpha_{1q} + m_{i2}\alpha_{2q} + \dots + m_{in}\alpha_{nq} \\ k_i &= m_{i1}\gamma_1 + m_{i2}\gamma_2 + \dots + m_{in}\gamma_n \\ \alpha_{ii} &= 1 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Per $i = 1$, dalle (3.54) si ha

$$\begin{aligned} m_{11} &= a_{11}, & m_{11}\alpha_{12} &= a_{12}, & m_{11}\alpha_{13} &= a_{13}, \\ & & & & & \dots, & m_{11}\alpha_{1n} &= a_{1n}, & m_{11}\gamma_1 &= k_1 \end{aligned}$$

dalle quali si ricavano successivamente $m_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}, \gamma_1$.

Si ottengono così i coefficienti e il termine noto della prima equazione del sistema (3.52) e l'elemento m_{ij} della prima riga della matrice M (3.53).

Per $i = 2$, dalle (3.54) si ha

$$m_{21} = a_{12}, \quad m_{21}\alpha_{12} + m_{22} = a_{22}, \quad m_{21}\alpha_{13} + m_{22}\alpha_{23} = a_{23}, \\ \dots, \quad m_{21}\alpha_{1n} + m_{22}\alpha_{2n} = a_{2n}, \quad m_{21}\gamma_1 + m_{22}\gamma_2 = k_2$$

dalle quali si ricavano successivamente $m_{21}, m_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}, \gamma_2$. Si ricavano in questo modo tutti i coefficienti e il termine noto della seconda equazione del sistema (3.52) e gli elementi della seconda riga della matrice M (3.53).

Così proseguendo si ottengono tutti i coefficienti e i termini noti del sistema di equazioni (3.52) e contemporaneamente tutti i numeri m_{pq} della matrice M.

Considerata la matrice dei coefficienti e dei termini noti del sistema (3.51)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & k_{nn} \end{pmatrix}$$

e considerata la matrice dei coefficienti e dei termini noti del sistema (3.52):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{2n} & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

dalle (3.54) segue

$$B = M \cdot C$$

Ci si riduce dunque alla decomposizione della matrice B nel prodotto delle matrici triangolari M e C .

3.7 Esempio della risoluzione con Gauss-Banachiewicz

Segue ora un esempio di risoluzione di un sistema di equazioni con il metodo appena esposto. Considerando il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 14x_3 + 10x_4 = 60 \\ 7x_1 + 26x_2 + 39x_3 + 85x_4 = 310 \\ 6x_1 + 14x_2 + 51x_3 - 8x_4 = 105 \\ 5x_1 + 13x_2 + 42x_3 + 12x_4 = 127 \end{cases}$$

occorre determinare le m_{pq} , α_{pq} , γ_p con $(p, q = 1, 2, 3, 4; p \leq q)$ per trovare un sistema equivalente a quello inizialmente dato dalle ipotesi ;

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 14 & 10 & 60 \\ 7 & 26 & 39 & 85 & 310 \\ 6 & 14 & 51 & -8 & 105 \\ 5 & 13 & 42 & 12 & 127 \end{pmatrix}$$

Gli elementi della prima riga della *matrice prodotto* danno le relazioni

$$2 = m_{11}, \quad 6 = \alpha_{12}m_{11}, \quad 14 = \alpha_{13}m_{11}, \quad 10 = \alpha_{14}m_{11}, \quad 60 = \gamma_1m_{11}$$

da cui

$$m_{11} = 2, \quad \alpha_{12} = 3, \quad \alpha_{13} = 7, \quad \alpha_{14} = 5, \quad \gamma_1 = 30.$$

La seconda riga della *matrice prodotto* restituisce

$$m_{21} = 7, \quad \alpha_{12}m_{21} + m_{22} = 26, \quad \alpha_{13}m_{21} + \alpha_{23}m_{22} = 39,$$

$$\alpha_{14}m_{12} + \alpha_{24}m_{22} = 85, \quad \gamma_1m_{12} + \gamma_2m_{22} = 310,$$

da cui

$$m_{21} = 7, \quad m_{22} = 5, \quad \alpha_{23} = -2, \quad \alpha_{24} = 10, \quad \gamma_2 = 20.$$

Dalla terza orizzontale della *matrice prodotto* ottengo

$$m_{31} = 6, \quad \alpha_{12}m_{31} + m_{23} = 14, \quad \alpha_{13}m_{31} + \alpha_{23}m_{32} = 51,$$

$$\alpha_{14}m_{13} + \alpha_{24}m_{23} + \alpha_{34}m_{33} = -8, \quad \gamma_1m_{13} + \gamma_2m_{23} + \gamma_3m_{33} = 105,$$

da cui

$$m_{31} = 6, \quad m_{32} = -4, \quad m_{33} = 1, \quad \alpha_{34} = 2, \quad \gamma_3 = 5.$$

Infine, dalla quarta orizzontale della *matrice prodotto* posso scrivere

$$m_{41} = 5, \quad \alpha_{12}m_{41} + m_{24} = 13, \quad \alpha_{13}m_{41} + \alpha_{23}m_{42} + m_{43} = 42,$$

$$\alpha_{14}m_{41} + \alpha_{24}m_{42} + \alpha_{34}m_{43} + m_{44} = 12, \quad \gamma_1m_{41} + \gamma_2m_{42} + \gamma_3m_{43} + \gamma_4m_{44} = 127,$$

da cui

$$m_{41} = 5, \quad m_{42} = -2, \quad m_{43} = 3, \quad m_{44} = 1 \quad \gamma_4 = 2.$$

In conclusione, il sistema inizialmente dato si può riscrivere sotto forma del sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 30 \\ x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 20 \\ x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$x_4 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 7$$

che scritta sotto forma di matrice ne risulta una *matrice colonna*

$$\text{matrice soluzione} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Capitolo 4

Esercizio pratico del problema

4.1 Esempio con 5 nodi

In questo capitolo viene eseguito un esercizio di un caso base di ripartizione di potenza elettrica con lo scopo di mettere in pratica entrambi i metodi di risoluzione che sono stati precedentemente introdotti.

Considero il caso di cinque nodi connessi a forma di pentagono dove nel nodo 1 vengono iniettati 150 MW di potenza elettrica, nel nodo 2 prelevati 100 MW, nel nodo 3 iniettati 50 MW e nei nodi 4 e 5 vengono prelevati rispettivamente 25 e 75 MW. Le reattanze caratteristiche di ogni linea sono descritte in “*per unità*” ed hanno i seguenti valori:

$$\text{linea } 1 - 2 \longrightarrow X_{12} = 0.4 \text{ p.u.}$$

$$\text{linea } 1 - 5 \longrightarrow X_{15} = 0.5 \text{ p.u.}$$

$$\text{linea } 2 - 3 \longrightarrow X_{23} = 0.4 \text{ p.u.}$$

$$\text{linea } 3 - 4 \longrightarrow X_{34} = 0.5 \text{ p.u.}$$

$$\text{linea } 4 - 5 \longrightarrow X_{45} = 0.25 \text{ p.u.}$$

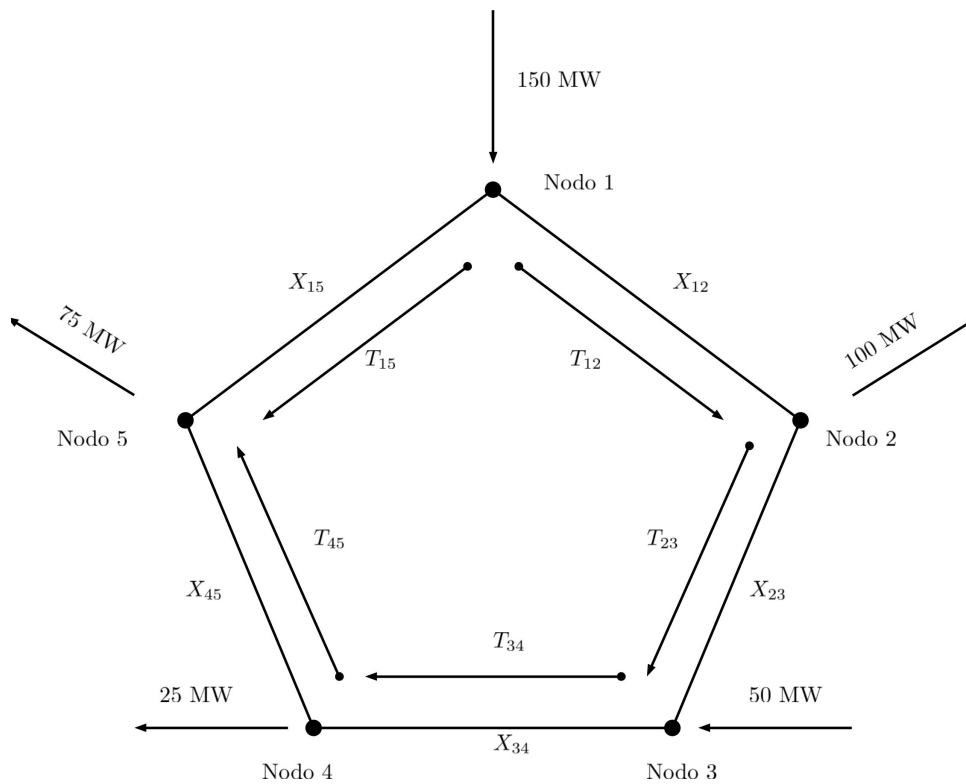


Figura 4.1: Schema dell'esercizio pratico a 5 nodi [5]

Per prima cosa definisco le matrici che ricavo dalle ipotesi fornite dal problema.

1. La matrice diagonale delle reattanze di linea inverse

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. La matrice delle connessioni e la sua *trasposta*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice B_f data dalla relazione $B_f = \Omega \cdot A$.

$$B_f = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando il prodotto matriciale si ottiene

$$B_f = \begin{pmatrix} 2.5 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Considerando come nodo di saldo il nodo numero "1" scrivo anche la corrispondente matrice *ridotta*

$$B_{fr} = \begin{pmatrix} -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcolo ora la matrice delle suscettanze nodali data dalla relazione $B = A^T \cdot B_f$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4.5 & -2.5 & 0 & 0 & -2 \\ -2.5 & 5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 4.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

dalla quale elimino la prima riga e la prima colonna per calcolare la sua ridotta

$$B_r = \begin{pmatrix} 5 & -2.5 & 0 & 0 \\ -2.5 & 4.5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Una volta calcolata la matrice B_r , si può procedere con il calcolo della sua inversa.

Per prima cosa calcolo il suo determinante utilizzando il *teorema di Laplace* :

$$\det(B_r) = (-1)^8 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 4.5 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^7 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 4.5 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\det(B_r) = 465 - 260 = 205$$

Dopodichè calcolo la matrice trasposta dei cofattori

$$cof = \begin{pmatrix} 66 & 50 & 30 & 20 \\ 50 & 100 & 60 & 40 \\ 30 & 60 & 97.5 & 65 \\ 20 & 40 & 65 & 77.5 \end{pmatrix}$$

L'inverso della matrice di partenza B_r è data dalla relazione

$$B_r^{-1} = \frac{1}{\det(B_r)} \cdot cof$$

$$B_r^{-1} = \frac{1}{205} \cdot \begin{pmatrix} 66 & 50 & 30 & 20 \\ 50 & 100 & 60 & 40 \\ 30 & 60 & 97.5 & 65 \\ 20 & 40 & 65 & 77.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.24 & 0.15 & 0.10 \\ 0.24 & 0.49 & 0.29 & 0.20 \\ 0.15 & 0.29 & 0.48 & 0.32 \\ 0.10 & 0.20 & 0.32 & 0.38 \end{pmatrix}$$

Infine, la matrice $ptdf$ è data dal prodotto matriciale

$$ptdf = B_{fr} \cdot B_r^{-1} \quad (4.1)$$

che sviluppato restituisce

$$ptdf = \begin{pmatrix} -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.32 & 0.24 & 0.15 & 0.10 \\ 0.24 & 0.49 & 0.29 & 0.20 \\ 0.15 & 0.29 & 0.48 & 0.32 \\ 0.10 & 0.20 & 0.32 & 0.38 \end{pmatrix}$$

$$ptdf = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.61 & -0.37 & -0.24 \\ -0.20 & -0.39 & -0.63 & -0.76 \\ 1.41 & 1.83 & 1.10 & 0.73 \\ 0.20 & 0.39 & -0.37 & -0.24 \\ 0.20 & 0.39 & 0.63 & -0.24 \end{pmatrix}$$

Le potenze ripartite vengono calcolate mediante la formula finale

$$T_i = ptdf \cdot P_i$$

$$T_i = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.61 & -0.37 & -0.24 \\ -0.20 & -0.39 & -0.63 & -0.76 \\ 1.41 & 1.83 & 1.10 & 0.73 \\ 0.20 & 0.39 & -0.37 & -0.24 \\ 0.20 & 0.39 & 0.63 & -0.24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ -25 \\ -75 \end{pmatrix}$$

La matrice delle potenze ripartite è data da

$$T_i = \begin{pmatrix} T_{12} \longrightarrow 77.44 \text{ MW} \\ T_{15} \longrightarrow 72.56 \text{ MW} \\ T_{23} \longrightarrow -22.56 \text{ MW} \\ T_{34} \longrightarrow 27.44 \text{ MW} \\ T_{45} \longrightarrow 2.44 \text{ MW} \end{pmatrix}$$

La matrice T_i descrive la ripartizione dei flussi di potenza elettrica nelle linee.

La precisione del risultato è stata influenzata da un'approssimazione alla seconda cifra decimale. Ciò nonostante l'errore commesso può essere considerato trascurabile.

Analizzando il risultato si può vedere che il bilancio della potenza del nodo 2 vede 77.44 MW dal nodo 1 e 72.56 MW dal nodo 3 per un totale di 150 MW di potenza assorbita da esso. Il nodo 3 invece cede 22.56 MW al nodo 2 e 27.44 al nodo 4 per un totale di 50 MW iniettati. Il nodo 4 riceve 27.44 MW dal nodo 3 e ne trasmette 2.44 al nodo 5 per un totale di 25 MW assorbiti. Il nodo 5 riceve 2.44 MW dal nodo 4 e 72.56 MW dal nodo 1 assorbendo perciò 75 MW totali.

Il nodo 1, nodo che viene considerato come *nodo di saldo* durante la trattazione del problema, trasmette 77.44 MW al nodo 2 e 72.56 MW al nodo 5 risultando coerente con i 150 MW iniettati forniti dalle ipotesi del problema.

4.1.1 Risoluzione con Gauss-Banachiewicz

Ripropongo in questa sottosezione il problema precedente risolvendolo con il metodo di *Gauss – Banachiewicz* ripartendo dal calcolo della matrice B_r . Al fine di avere chiarezza ed un quadro generale della risoluzione, riporto le matrici che verranno in seguito utilizzate :

1. La matrice delle suscettanze nodali ridotta

$$B_r = \begin{pmatrix} 5 & -2.5 & 0 & 0 \\ -2.5 & 4.5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. La matrice delle potenze

$$P = \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ -25 \\ -75 \end{pmatrix}$$

3. La matrice

$$B_{fr} = \begin{pmatrix} -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

L'idea che sta alla base di questa risoluzione secondaria è quella di considerare il sistema finale che mi permette di ottenere i transiti di potenza

$$T_i = ptdf \cdot P_i$$

e di scomporla sviluppandone il membro $ptdf$ come segue

$$T_i = B_{fr} \cdot B_r^{-1} \cdot P_i$$

Considero a questo punto il prodotto tra matrici $B_r^{-1} \cdot P_i$ e lo eguaglio ad una matrice incognita \bar{X}

$$B_r^{-1} \cdot P_i = \bar{X}_i$$

dove, se B_r e P_i sono matrici definite invertibili, l'equazione appena scritta può essere riscritta sotto forma del sistema di equazioni

$$B_r \cdot \bar{X}_i = P_i \quad (4.2)$$

Il sistema (4.2) ha come *matrice soluzione* la matrice \bar{X} che inserita nel sistema di equazioni

$$T_i = B_{fr} \cdot \bar{X}_i \quad (4.3)$$

mi restituisce i valori dei transiti di potenza nelle linee elettriche.

Ora l'obiettivo è quello di calcolare la matrice incognita \bar{X} e per farlo, devo per primo ottenere un sistema equivalente alla matrice B_r avente la matrice P come colonna dei termini noti trovando tutti gli α_{ij} gli m_{ij} e tutti i γ_{ij} del sistema

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2.5 & 0 & 0 & -100 \\ -2.5 & 4.5 & -2 & 0 & 50 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & -25 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & -75 \end{pmatrix}$$

che mi permettono di risolvere il seguente sistema di equazioni

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

Quest'ultimo sistema mi fornirà come soluzione la matrice \bar{X} composta dalle soluzioni x_i da inserire nel sistema di equazioni finale (4.3)

$$\bar{X} \longrightarrow T_i = B_{fr} \cdot \bar{X}_i$$

Procedo ora con la risoluzione del sistema degli α_{ij} , m_{ij} e dei γ_{ij} seguendo lo schema risolutivo sottostante

$$a_{iq} = m_{i1}\alpha_{1q} + m_{i2}\alpha_{2q} + \dots + m_{in}\alpha_{nq}$$

$$k_i = m_{i1}\gamma_1 + m_{i2}\gamma_2 + \dots + m_{in}\gamma_n$$

$$\alpha_{ii} = 1$$

Rispettivamente per $i = 1$ e per $i = 2$ si ha

$$a_{11} = m_{11} \cdot \alpha_{11}$$

$$m_{11} = 5$$

$$a_{12} = m_{11} \cdot \alpha_{12}$$

$$\alpha_{12} = -0.5$$

$$a_{13} = m_{11} \cdot \alpha_{13}$$

$$\alpha_{13} = 0$$

$$a_{14} = m_{11} \cdot \alpha_{14}$$

$$\alpha_{14} = 0$$

$$k_1 = m_{11} \cdot \gamma_1$$

$$\gamma_1 = -20$$

$$a_{21} = m_{21} \cdot \alpha_{11}$$

$$m_{21} = -2.5$$

$$a_{22} = m_{21} \cdot \alpha_{12} + m_{22}$$

$$m_{22} = 3.25$$

$$a_{23} = m_{21} \cdot \alpha_{13} + m_{22} \cdot \alpha_{23}$$

$$\alpha_{23} = -0.62$$

$$a_{24} = m_{21} \cdot \alpha_{14} + m_{22} \cdot \alpha_{24}$$

$$\alpha_{24} = 0$$

$$k_2 = m_{21} \cdot \gamma_1 + m_{22} \cdot \gamma_2$$

$$\gamma_2 = 0$$

Per $i = 3$

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= m_{31} \cdot \alpha_{11} & m_{31} &= 0 \\
 a_{32} &= m_{31} \cdot \alpha_{12} + m_{32} & m_{32} &= -2 \\
 a_{33} &= m_{31} \cdot \alpha_{13} + m_{32} \cdot \alpha_{23} + m_{33} & m_{33} &= 4.77 \\
 a_{34} &= m_{31} \cdot \alpha_{14} + m_{32} \cdot \alpha_{24} + m_{33} \cdot \alpha_{34} & \alpha_{34} &= -0.84 \\
 k_3 &= m_{31} \cdot \gamma_1 + m_{32} \cdot \gamma_2 + m_{33} \cdot \gamma_3 & \gamma_3 &= -5.24
 \end{aligned}$$

Per $i = 4$

$$\begin{aligned}
 a_{41} &= m_{41} \cdot \alpha_{11} & m_{41} &= 0 \\
 a_{42} &= m_{41} \cdot \alpha_{12} + m_{42} & m_{42} &= 0 \\
 a_{43} &= m_{41} \cdot \alpha_{13} + m_{42} \cdot \alpha_{23} + m_{43} & m_{43} &= -4 \\
 a_{44} &= m_{41} \cdot \alpha_{14} + m_{42} \cdot \alpha_{24} + m_{43} \cdot \alpha_{34} + m_{44} & m_{44} &= 2.65 \\
 k_4 &= m_{41} \cdot \gamma_1 + m_{42} \cdot \gamma_2 + m_{43} \cdot \gamma_3 + m_{44} \cdot \gamma_4 & \gamma_4 &= -36.27
 \end{aligned}$$

La risoluzione per *sostituzione* del sistema precedente mi permette riscrivere il sistema di equazioni (4.4) con i valori *soluzione* degli α_{ij} e dei γ_{ij}

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.62 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.84 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ -5.24 \\ -36.27 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{array}{ll}
 x_1 - 0.5 \cdot x_2 = -20 & x_1 = -31.07 \\
 x_2 - 0.62 \cdot x_3 = 0 & x_2 = -22.14 \\
 x_3 - 0.84 \cdot x_4 = -5.24 & x_3 = -35.71 \\
 -36.27 = x_4 & x_4 = -36.27
 \end{array}$$

La soluzione di quest'ultimo sistema è dato dalla matrice colonna delle x_i definita \bar{X}

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31.07 \\ -22.14 \\ -35.71 \\ -36.27 \end{pmatrix}$$

Per ricavare il valore finale dei transiti di potenza delle linee elettriche inserisco la matrice soluzione \bar{X} nel sistema di equazioni (4.3)

$$\begin{pmatrix} -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -31.07 \\ -22.14 \\ -35.71 \\ -36.27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{15} \\ T_{23} \\ T_{34} \\ T_{45} \end{pmatrix}$$

Risolvendo quest'ultimo sistema ottengo le soluzioni delle T_{ij}

$$\begin{array}{ll}
 T_{12} = -2.5 \cdot (-31.07) & T_{12} = 77.68 \\
 T_{15} = -2 \cdot (-36.27) & T_{15} = 72.54 \\
 T_{23} = 2.5 \cdot (-31.07) - 2.5 \cdot (-22.14) & T_{23} = -22.33 \\
 T_{34} = 2 \cdot (-22.14) - 2 \cdot (-35.71) & T_{34} = 27.14 \\
 T_{45} = 4 \cdot (-35.71) + (-4) \cdot (-36.27) & T_{45} = 2.24
 \end{array}$$

La matrice colonna *soluzione* dei transiti di potenza è data da :

$$T_i = \begin{pmatrix} T_{12} \longrightarrow 77.68 \text{ MW} \\ T_{15} \longrightarrow 72.54 \text{ MW} \\ T_{23} \longrightarrow -22.33 \text{ MW} \\ T_{34} \longrightarrow 27.14 \text{ MW} \\ T_{45} \longrightarrow 2.24 \text{ MW} \end{pmatrix}$$

La matrice soluzione ottenuta con il metodo *Gauss – Banachiewicz* presenta dei risultati meno precisi rispetto a quella ottenuta con il metodo principale a causa dell'approssimazione alla seconda cifra decimale. Quest'errore però si può considerare trascurabile.

Se si proietta quest'ultimo sistema di risoluzione in una situazione reale in cui i nodi e le linee elettriche possono essere decine o centinaia, si intuisce chiaramente l'entità del risparmio di calcolo che il metodo di *Gauss – Banachiewicz* offre.

Bibliografia

- [1] Antonella Carfagna, Lia Piccolella : *Complementi ed esercizi di geometria e algebra lineare* , Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Roma, 2003
- [2] M. Villa : *Elementi di algebra*, Patron, 1962
- [3] Dispense del corso di “Produzione e conversione dell'energia elettrica”, Professori A. Borghetti e C. A. Nucci, Università di Bologna.

Vorrei ringraziare per primo il Prof. M. Ferri per la disponibilità e la pazienza con cui mi ha seguito durante il percorso della tesi ed anche per la grande professionalità e passione dimostrate durante ogni sua lezione che sono state per me fonte di profonda ispirazione. Ringrazio il Prof. A. Borghetti per i consigli importanti che mi ha fornito durante la stesura della tesi.

Desidero ringraziare tutte quelle persone che mi sono state accanto durante questo percorso e che hanno contribuito a renderlo ricco e speciale. In particolare ringrazio Beatrice per essermi stata accanto nei momenti più critici e per aver condiviso con me tanti momenti stupendi ed i “*Condor*” fedeli compagni di avventura.

Infine, il più grande ringraziamento va alla mia famiglia ed in particolare ai miei genitori che sempre hanno saputo rendermi libero nel mio percorso mantenendo un sostegno costante che mi ha permesso di raggiungere questo obiettivo.