

*La felicità è reale
solo quando è condivisa*

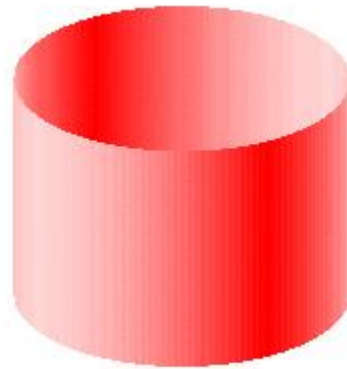
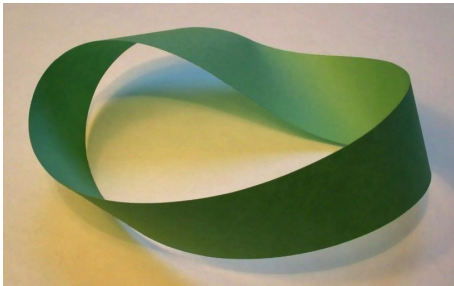
Introduzione

La robotica è una disciplina estremamente vasta in cui confluiscono apporti da diverse parti della matematica. Preponderante è senz'altro l'uso di equazioni differenziali, mentre, solo recentemente, si è fatto strada un approccio topologico. In particolare, questo tipo di studio viene ora applicato ai problemi di pianificazione del moto soprattutto ad opera di Michael Farber, professore presso l'Università di Durham.

Il *motion planning* si articola in due grandi capitoli: la progettazione di percorsi per veicoli autonomi (per la ricognizione militare, l'esplorazione planetaria, ecc.) e l'organizzazione del moto di un braccio robotico complesso. Consideriamo il seguente problema: in uno spazio euclideo si è fissato un punto di partenza P ; la pianificazione di un percorso verso un punto di arrivo A è estremamente semplice: si sceglie il segmento congiungente i due punti. Nello spazio dei possibili percorsi uscenti da P questa scelta è continua al variare di A mentre, se ci trovassimo in una varietà non semplicemente connessa, questa continuità potrebbe cadere. La Complessità Topologica è un invariante numerico definito come il minimo numero di carte su cui tale pianificazione è continua. Sono state già calcolate le complessità topologiche di diverse famiglie di spazi, ed è stata anche definita una Complessità Topologica Relativa, in cui sono fissati sottoinsiemi di punti di partenza e arrivo dei cammini.

Questo lavoro di tesi è volto a calcolare la complessità topologica del cilindro e del nastro di Möbius relativa ai loro bordi. La ricerca ha anche fornito alcuni sottoprodotti: la complessità topologica di un prodotto $X \times [0, 1]$ re-

lativa a $X \times \{0, 1\}$, dove le due componenti di quest'ultimo spazio possono essere considerate entrambe di arrivo e partenza o solo una di partenza e l'altra di arrivo.



Dopo un primo capitolo dedicato a introdurre i concetti principali della robotica topologica, il secondo espone il risultato vero e proprio della ricerca.

Indice

Introduzione	i
1 Un nuovo invariante topologico: la Topological Complexity	1
1.1 Algoritmi di Pianificazione del Moto	1
1.2 Pianificatori del Moto e Complessità Topologica	6
1.3 Complessità Relativa	13
1.4 Invarianza Omotopica della Complessità Topologica	16
2 Nastro di Möbius e Cilindro a confronto	23
2.1 Complessità Topologica Relativa del Cilindro	23
2.2 Complessità Topologica Relativa del Nastro di Möbius	26
Conclusioni	33
Bibliografia	35

Capitolo 1

Un nuovo invariante topologico: la Topological Complexity

In questo capitolo vedremo come la risoluzione di problemi di progettazione e gestione di algoritmi per il controllo di sistemi dinamici abbia portato alla definizione di un nuovo indicatore topologico invariante per omotopie detto appunto Topological Complexity (Complessità Topologica).

1.1 Algoritmi di Pianificazione del Moto

Sia X uno spazio topologico connesso per archi che possiamo identificare come lo spazio delle configurazioni di un sistema meccanico caratterizzato dalla possibilità di passare in modo continuo da un qualsiasi stato A in un qualsiasi stato B .

Sia poi PX l'insieme dei cammini continui su X , cioè:

$$PX := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X : \gamma \text{ continuo}\}$$

che, dotato della topologia compatta aperta, diventa anch'esso uno spazio topologico i cui aperti sono:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{n_j} W(K_{i_j}; U_{i_j}) \right)$$

dove $W(K_{i_j}; U_{i_j}) = \{f : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : f(K_{i_j}) \subset U_{i_j}\}$ con K_{i_j} compatto di I e U_{i_j} aperto di X .

Definizione 1.1. Dati X e PX come sopra, definiamo la seguente mappa:

$$\begin{aligned} \pi : PX &\longrightarrow X \times X \\ \gamma &\longmapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \end{aligned}$$

Proposizione 1.1.1. π è una fibrazione nel senso di Serre¹.

Dimostrazione. Siano $n \in \mathbb{N}$, $I = [0, 1]$, g una qualunque mappa continua $g : I^n \ni s \mapsto \gamma_s \in PX$ ed $F : I^n \times I \rightarrow X \times X$ un'omotopia tale che $\forall (s, 0) \in I^n \times \{0\}$, $F(s, 0) = (\pi \circ g)(s, 0) = (\gamma_s(0), \gamma_s(1))$.

Consideriamo quindi la seguente applicazione:

$$G : I^n \times I \longrightarrow PX$$

$$(s, \sigma) \longmapsto G(s, \sigma)(t) := \begin{cases} F_1(s, \sigma - 3t) & t \in [0, \frac{1}{3}\sigma] \\ \gamma_s(\frac{3t-\sigma}{3-2\sigma}) & t \in [\frac{1}{3}\sigma, 1 - \frac{1}{3}\sigma] \\ F_2(s, 3(t - 1 + \frac{1}{3}\sigma)) & t \in [1 - \frac{1}{3}\sigma, 1] \end{cases}$$

dove si è indicato con $F_1(s, \sigma)$ ed $F_2(s, \sigma)$, rispettivamente, la prima e seconda componente di $F(s, \sigma)$.

G è ben definita in quanto $G(s, \sigma)$ è un cammino continuo in X rispetto a t ; infatti la continuità nei nodi è preservata:

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{3}\sigma &\Rightarrow F_1(s, (\sigma - 3 * \frac{1}{3}\sigma)) = F_1(s, 0) = \gamma_s(0) = \gamma_s(\frac{3 * \frac{1}{3}\sigma - \sigma}{3 - 2\sigma}) \\ t = 1 - \frac{1}{3}\sigma &\Rightarrow \gamma_s(\frac{3(1 - \frac{1}{3}\sigma) - \sigma}{3 - 2\sigma}) = \gamma_s(1) = F_2(s, 0) = F_2(s, 3(1 - \frac{1}{3}\sigma - 1 + \frac{1}{3}\sigma)) \end{aligned}$$

Per un risultato noto in topologia generale, se una funzione $F : Y \rightarrow C(S, X)_{c-o}$ è continua ed S è localmente compatto, allora anche la funzione $F_0 : Y \times S \rightarrow X$ è continua. Utilizziamo ripetutamente questo risultato

¹Una mappa $f : E \rightarrow B$ è detta **fibrazione di Serre** (o debole) se comunque dati $n \in \mathbb{N}$, una mappa continua $g : [0, 1]^n \rightarrow E$ e un'omotopia $F : [0, 1]^n \times [0, 1] \rightarrow B$ tale che $F|_{[0, 1]^n \times \{0\}} = p \circ g$, esiste un'omotopia $G : [0, 1]^n \times [0, 1] \rightarrow E$ tale che $G|_{[0, 1]^n \times \{0\}} = g$ e $F = p \circ G$

per mostrare che la funzione G sopra definita è continua rispetto a tutte le variabili. Consideriamo inizialmente l'applicazione

$$G(s, \sigma, -) : [0, 1] \ni t \longmapsto G(s, \sigma)(t)$$

che abbiamo già stabilito essere continua allora, poiché $[0, 1]$ è compatto, si avrà, per il risultato sopra enunciato, che anche l'applicazione

$$G(s, -, -) : [0, 1] \times [0, 1] \ni (\sigma, t) \longmapsto G(s)(\sigma, t)$$

è continua.

Infine, dato che anche $[0, 1] \times [0, 1]$ è compatto, avremo che anche la mappa

$$G : I^n \times [0, 1] \times [0, 1] \ni (s, \sigma, t) \longmapsto G(s, \sigma, t)$$

è continua.

Per concludere verifichiamo che G rispetti le condizioni della definizione di fibrazione debole. Ricordando dalle ipotesi che $F(s, 0) = (\pi \circ g)(s, 0) = (\gamma_s(0), \gamma_s(1))$, si ha:

$$\begin{aligned} G|_{I^n \times \{0\}}(t) = G(s, 0)(t) &= \begin{cases} F_1(s, -3t) & t \in [0, 0] \\ \gamma_s(t) & t \in [0, 1] \\ F_2(s, 3(t-1)) & t \in [1, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma_s(0) & t \in [0, 0] \\ \gamma_s(t) & t \in [0, 1] \\ \gamma_s(1) & t \in [1, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

cioè $G|_{I^n \times \{0\}} = g$. Infine, osserviamo che G è stata costruita proprio come cammino su X i cui estremi sono $G(s, \sigma)(0) = F_1(s, \sigma - 3 * 0) = F_1(s, \sigma)$ e $G(s, \sigma)(1) = F_2(s, 3(1 - 1 + \frac{1}{3}\sigma)) = F_2(s, \sigma)$. Si ha quindi $\pi \circ G = F$ e questo conclude la dimostrazione. \square

Definizione 1.2. Si definisce **Motion Planning Algorithm** una qualunque sezione s , non necessariamente continua, della mappa π , cioè una applicazione

$$\begin{aligned} s : X \times X &\longrightarrow PX \\ (A, B) &\longmapsto \gamma_{A,B} \end{aligned}$$

tale che $\gamma_{A,B}(0) = A$, $\gamma_{A,B}(1) = B$ o, equivalentemente, $\pi \circ s = id_{X \times X}$.

Osservazione 1. Condizione necessaria e sufficiente affinché esistano sezioni di una mappa f è che questa sia suriettiva. Nel nostro caso la mappa π è suriettiva in quanto abbiamo supposto X connesso per archi.

Nelle applicazioni, ad esempio in robotica, è centrale il problema della determinazione degli Algoritmi di Pianificazione del Moto, in quanto permettono di stabilire una regola per portare un sistema fisico da un certo stato iniziale (A) nello stato desiderato (B) seguendo un percorso continuo che, il più delle volte, significa fisicamente possibile. Altrettanto fondamentale è studiare la continuità dell'algoritmo rispetto ai dati iniziali, cioè capire se la regola trovata per passare dallo stato A allo stato B è utilizzabile per ogni coppia di stati nello spazio delle configurazioni del sistema (caso della sezione continua), oppure è valida solo per coppie di stati vicini ad (A,B). Per rispondere a questa domanda è necessario indagare la natura dello spazio delle configurazioni del sistema ed in particolare studiarne le proprietà topologiche.

Teorema 1.1.2. *Siano X , PX e π come sopra, allora si ha:*

$$\exists s \text{ sezione continua di } \pi \text{ su tutto } X \times X \iff X \text{ è contraibile}^2$$

Dimostrazione. Mostriamo \Rightarrow .

Fissiamo $P \in X$. Per ipotesi $\forall x \in X$, $s(x, P)$ è un cammino continuo su X che porta x in P . Consideriamo le mappe $i : \{P\} \ni P \mapsto P \in X$ e $p : X \ni x \mapsto P \in \{P\}$ entrambe banalmente continue, e guardiamo alle composizioni:

$$p \circ i : P \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} P \Leftrightarrow p \circ i = id_P$$

$$i \circ p : x \xrightarrow{p} P \xrightarrow{i} P \Leftrightarrow i \circ p = i$$

Rimane da mostrare che $i \sim id_X$. Consideriamo la seguente funzione:

$$\begin{aligned} F : X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) := s(x, P)(t) \end{aligned}$$

²Uno spazio topologico X si dice **contraibile** se è omotopicamente equivalente a un punto, cioè se esistono due mappe continue $f : X \rightarrow \{P\}$, $g : \{P\} \rightarrow X$ tali che $f \circ g$ è (omotopa a) id_P e $g \circ f$ è omotopa a id_X

è continua in x ed in t per ipotesi quindi è un'omotopia, inoltre $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = P \forall x \in X$, cioè $F(-, 0) = id_X$ e $F(-, 1) = i$.

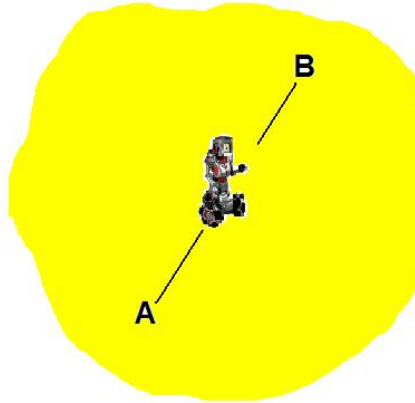
Mostriamo \Leftarrow .

Poiché X è contraibile per ipotesi, si ha che $\forall P \in X$ esiste un'applicazione continua $p : X \ni x \mapsto P \in \{P\}$ ed un'omotopia $F_P : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che $F_P(-, 0) = p$ e $F_P(-, 1) = id_X$. Così per ogni coppia di punti $x, y \in X$ diversi da P , posso considerare il cammino $\gamma(t) := \begin{cases} F_P(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_P^{-1}(y, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ che porta x in y . Definisco quindi $s(x, y) := \gamma$ per ogni coppia (x, y) . \square

Il teorema ci dice che solo per i sistemi il cui spazio delle configurazioni è contraibile, è possibile determinare un unico algoritmo continuo di pianificazione del moto valido per ogni coppia di stati. E per gli altri sistemi cosa possiamo fare? Consideriamo il seguente esempio tratto dall'articolo *Instabilities of Robot Motion* di Michael Farber:

Esempio 1.1. Supponiamo di dover insegnare a un robot che vive su un'isola deserta come muoversi da un punto iniziale A ad un punto finale B .

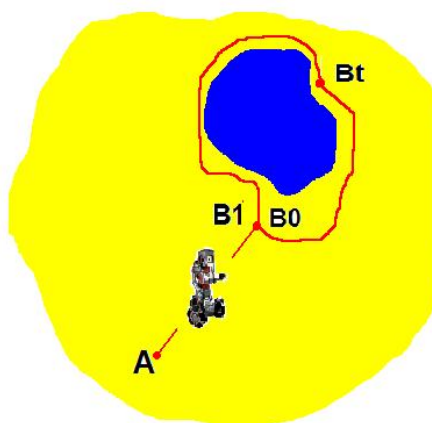
Supponiamo inizialmente che l'isola abbia la forma di un sottoinsieme convesso (e quindi contraibile) di \mathbb{R}^2 , allora, per qualsiasi coppia di punti sull'isola, sarà sufficiente dire al robot di muoversi a velocità costante lungo il segmento di linea retta che congiunge i due punti e avremo così trovato una regola valida per tutta l'isola che definisce una sezione continua di π .



Se ora supponiamo che nell'isola ci sia un lago e che il nostro robot non abbia la capacità di nuotare, osserviamo immediatamente che non è possibile dare al robot un'unica regola valida per muoversi da A a B . Infatti, se per assurdo ci fosse una sezione continua definita su tutta l'isola avremo che

$\forall (A, B)$, $s(A, B)$ è un cammino continuo sulla terraferma che porta A in B e che dipende da essi in modo continuo, cioè data una seconda coppia (A', B') vicina ad (A, B) avremo un cammino $s(A', B')$ vicino a $s(A, B)$. Tuttavia se consideriamo le coppie (A, B_t) dove $t \in [0, 1]$, $B_0 = B = B_1$ e gli altri B_t sono disposti intorno al lago, avremo che i rispettivi

cammini $s(A, B_t)$ costruiti come composizioni di cammini successivi $s(B_t, B_{t'}) \circ s(B_{t'}, B_0) \circ s(A, B_0)$ con $t' < t$, non mantengono la relazione di vicinanza. In particolare, se guardiamo ai cammini $s(A, B_0)$ e $s(A, B_1)$ hanno gli stessi estremi ma tra loro *non sono vicini* in quanto il secondo è stato costruito apposta per girare intorno al lago.



Poiché non è sempre possibile lavorare con spazi contraibili, e quindi non è sempre possibile avere un'unica regola per determinare un movimento del sistema, l'idea del professor Michael Farber è stata quella di calcolare il numero minimo di regole che devo dare al sistema per avere movimenti ben definiti per ogni coppia di punti, cioè il numero minimo di sezioni continue con cui invertire la funzione. O, equivalentemente, il numero minimo di parti in cui suddividere X in modo tale che la mappa π ristretta alle singole parti abbia una sola sezione locale continua. E' stato così introdotto il concetto di **complessità topologica**.

1.2 Pianificatori del Moto e Complessità Topologica

Come già illustrato nel paragrafo precedente, il concetto di complessità topologica è stato introdotto a partire da necessità prevalentemente appli-

cative. In questo paragrafo ci proponiamo di ripercorrerne l'evoluzione, a partire dalla definizione operativa, fino alla sua estensione più astratta.

Poiché gli spazi delle configurazioni dei sistemi meccanici che appaiono nelle maggiori applicazioni industriali sono insiemi di tipo semi-algebrico³, e poiché ogni insieme semi-algebrico è omeomorfo a un poliedro⁴, la definizione di complessità topologica è stata introdotta a partire da spazi di configurazioni X omeomorfi a poliedri.

Definizione 1.3. Sia X un poliedro. Un **pianificatore del moto in X** è dato da una famiglia di sottoinsiemi F_1, \dots, F_k di $X \times X$ e da una famiglia di mappe continue $s_i : F_i \rightarrow PX$ dove $i = 1, \dots, k$ tali che:

- a) gli insiemi F_1, \dots, F_k sono a due a due disgiunti e costituiscono un ricoprimento di $X \times X$;
- b) $\pi \circ s_i = id|_{F_i}$ per ogni $i = 1, \dots, k$;
- c) ogni F_i è un ENR⁵ (Euclidean Neighbourhood Retract)

Osservazione 2. Le condizioni **a)+b)** sarebbero necessarie e sufficienti alla soluzione del problema di come determinare un algoritmo di pianificazione del moto. Tuttavia, la definizione comprende anche la terza condizione al fine di evitare alcuni esempi patologici poco interessanti da un punto di vista applicativo. Osserviamo inoltre, che la classe degli spazi topologici ENR contiene al suo interno tutti i complessi cellulari finito dimensionali e tutte le varietà, risulta essere quindi più che esauriente ai fini delle applicazioni.

³Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n si dice **semi-algebrico** se è l'unione finita di insiemi del tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_s(x) > 0\}$$

dove $s \in \mathbb{N}$ e P, Q_1, \dots, Q_s sono polinomi in x_1, \dots, x_n a coefficienti reali. Per maggiori informazioni vedere [4]

⁴Vedi Teorema 3.12 di [4]

⁵Uno spazio topologico X si dice **Retratto di un Intorno Euclideo** (ENR) se può essere immerso in uno spazio euclideo \mathbb{R}^n tale che, per un qualche intorno aperto U di X in \mathbb{R}^n , esiste una retrazione $r : U \rightarrow X$ tale che $r|_X = id_X$

Osservazione 3. Ad ogni pianificatore del moto corrisponde in modo naturale un algoritmo di pianificazione del moto: per ogni $(A, B) \in X \times X$, consideriamo l'indice $i \in 1, \dots, k$ tale che $(A, B) \in F_i$ (esiste ed è unico perché gli F_i costituiscono un ricoprimento di insiemi disgiunti di $X \times X$) e definiamo $s(A, B) := s_i(A, B)$.

Definizione 1.4. Sia X un poliedro. Dato un pianificatore del moto (F_i, s_i) in X con $i = 1, \dots, k$, si definisce **complessità topologica dell'algoritmo di pianificazione del moto** il minimo intero l , $l \leq k$, tale per cui i sottoinsiemi F_1, \dots, F_l , muniti delle rispettive applicazioni s_1, \dots, s_l , costituiscono a loro volta un pianificatore del moto in X . Se tale l non esiste, si pone per definizione che la complessità topologica è infinita.

Definizione 1.5. Si definisce **complessità topologica dello spazio X** , e si indica con $TC(X)$, la minima complessità topologica degli algoritmi di pianificazione del moto al variare dei pianificatori del moto in X .

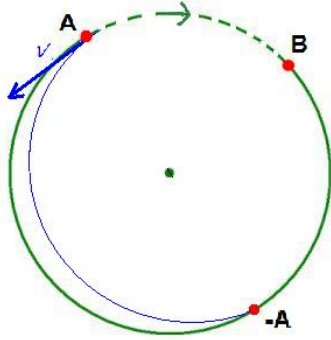
Quindi, fissato uno spazio X , determinare il numero minimo di regole da assegnare al robot per muoversi con continuità da un punto A ad un punto B dello spazio, senza cadere dentro il lago, equivale a calcolare la complessità topologica dello spazio.

Esempio 1.2. Supponiamo che il nostro robot debba muoversi sulla superficie di una sfera n -dimensionale, quante istruzioni dovremo assegnargli, al minimo, affinché possa muoversi con continuità lungo tutta la superficie? Distinguiamo due casi: n pari ed n dispari.

Sia inizialmente n dispari, per fissare le idee poniamo $n = 1$. Consideriamo un ricoprimento aperto di $S^1 \times S^1$ costituito dai seguenti due sottoinsiemi $F_1 := \{(A, B) : A \neq -B\}$ e $F_2 := \{(A, -A)\}$. Consideriamo poi le seguenti mappe:

1. $s_1 : F_1 \rightarrow PS^1$ che porta A in B muovendosi in modo continuo lungo l'unico arco di circonferenza più corto (in generale lungo la geodetica più corta).

2. $s_2 : F_2 \rightarrow PS^1$ che, fissato un vettore non nullo v tangente a S^1 (esiste necessariamente perché n è dispari), porta A in $-A$ muovendosi in modo continuo lungo la semicirconferenza che in A ha come vettore tangente v .



Siamo quindi riusciti a definire una sezione locale continua per ogni aperto del ricoprimento e quindi abbiamo provato che, per n dispari, $TC(S^n) \leq 2$. D'altra parte, poiché S^n è non contraibile necessariamente $TC(S^n) > 1$. Si ha quindi, per n dispari, $TC(S^n) = 2$.

Sia ora n pari, per fissare le idee poniamo $n = 2$. In questo caso non possiamo applicare la tecnica precedente perché ogni campo vettoriale su S^2 ha almeno uno zero. Scegliamo quindi un campo vettoriale su S^2 che abbia esattamente uno zero in $A_0 \in S^2$, e consideriamo il ricoprimento del prodotto cartesiano $F_1 := \{(A, B) : A \neq -B\}$, $F_2 := \{(A, -A) : A \neq A_0\}$, $F_3 := \{(A_0, -A_0)\}$ dotato delle seguenti applicazioni:

1. $s_1 : F_1 \rightarrow PS^2$ come sopra.
2. $s_2 : F_2 \rightarrow PS^2$ come sopra.
3. $s_3 : F_3 \rightarrow PS^2$ che porta A_0 in $-A_0$ muovendosi in modo continuo lungo un cammino arbitrario su S^2 .

Abbiamo così definito una sezione locale della mappa π per ogni aperto del ricoprimento, si ha quindi che, per n pari, $TC(S^n) \leq 3$. Inoltre, sfruttando tecniche coomologiche, si riesce a provare che, per n pari, $TC(S^n) = 3$. Per maggiori dettagli vedere [1], proposizione 4.41.

Il concetto di complessità topologica era, in realtà, già presente nello

scenario topologico sotto il nome di **genere di Schwarz**⁶ di un'opportuna fibrazione. Vale infatti il seguente risultato:

Teorema 1.2.1. *Dato X poliedro e data la fibrazione $\pi : PX \rightarrow X \times X$, si ha:*

$$TC(X) = \text{genere di Schwarz di } \pi$$

La dimostrazione di questo teorema sfrutta alcune proprietà specifiche degli ENR e dei poliedri. In particolare valgono i seguenti lemmi:

Lemma 1.2.2. *Siano F, X ENR tali che $F \subset X$, allora esiste un intorno aperto $U \subset X$ di F ed una retrazione $r : U \rightarrow F$ tale che l'inclusione $j : U \rightarrow X$ è omotopa a $i \circ r$, dove $i : F \rightarrow X$ è la mappa inclusione.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione rimandiamo a [5], corollario 8.7, capitolo 4. □

Lemma 1.2.3. *Siano $Y, Z \subset P$ due sottoinsiemi chiusi e disgiunti del poliedro P . Allora esiste un sottopoliedro $F \subset P$ tale che $Y \subset F$ e $F \cap Z = \emptyset$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione vedere [1], lemma 4.10, capitolo 4. □

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema 1.2.1.

Dimostrazione. Indichiamo con $g := g(\pi)$ e con $k = TC(X)$ e mostriamo che vale l'uguaglianza provando le due disuguaglianze $g \leq k$ e $k \leq g$.

Consideriamo il ricoprimento di $X \times X$ costituito dagli aperti F_1, \dots, F_k come nella definizione di $TC(X)$. Mostriamo che possiamo opportunamente allargare ogni F_j ad un intorno aperto U_j in modo tale che sia definita un'estensione continua di s_j .

Poiché gli insiemi $F_j \subset X \times X$ sono ENR, il lemma 1.2.2 implica che, per ogni j , esiste un intorno aperto U_j di F_j ed esiste un'omotopia $H_j : U_j \times [0, 1] \rightarrow X \times X$ tale che $H_j(-, 0)$ è la mappa inclusione di U_j in $X \times X$,

⁶Data una fibrazione $p : E \rightarrow B$ con fibra F , si definisce **genere di Schwarz** di p , e si indica con $g(p)$, il più piccolo intero k tale per cui esiste un ricoprimento U_1, \dots, U_k di aperti di B tali che per ogni j esiste $s_j : U_j \rightarrow E$ sezione continua di p .

mentre $H_j(-, 1)$ è la retrazione di U_j in F_j . Per concludere la prima parte della dimostrazione rimane da estendere ogni s_j ad una sezione continua della mappa π definita su tutto U_j . Sia $(A, B) \in U_j$ allora l'applicazione continua $H_j((A, B); -)$ può essere vista come una coppia di cammini (γ_A, δ_B) su $X \times X$ con estremi rispettivamente $\gamma_A(0) = A, \gamma_A(1)$ e $\delta_B(0) = B, \delta_B(1)$ dove la coppia $(\gamma_A(1), \delta_B(1))$ appartiene all'insieme F_j . Ricordando che, per ipotesi, su ogni F_j è definita una sezione continua s_j della mappa π , consideriamo la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_j : U_j &\longrightarrow PX \\ (A, B) &\longmapsto \tilde{s}_j(A, B) : [0, 1] \ni t \longmapsto \begin{cases} \gamma_A(3t) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ s_j(\gamma_A(1), \delta_B(1))(3t - 1) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \delta_B(3 - 3t) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

che risulta essere ben definita in quanto $\tilde{s}_j(A, B)(-)$ è un cammino continuo in t .

Inoltre si ha che la mappa \tilde{s}_j così definita è continua per successioni. Sia infatti $(A_k, B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in U_j convergente ad (A, B) , sia poi $\tilde{s}_j(A_k, B_k)$ la successione immagine in PX , cioè una successione di cammini continui in X aventi come estremi le coppie (A_k, B_k) . Ora, poiché i cammini γ_{A_k} e δ_{B_k} dipendono in modo continuo da, rispettivamente, A_k e B_k (per definizione di omotopia), passando al limite convergeranno, rispettivamente, ai cammini γ_A e δ_B ; d'altra parte, anche la mappa s_j è continua in F_j (per definizione di complessità topologica) e quindi la successione di cammini $s_j(\gamma_{A_k}(1), \delta_{B_k}(1))$ convergerà al cammino $s_j(\gamma_A(1), \delta_B(1))$. Ne segue quindi che la successione di cammini $\tilde{s}_j(A_k, B_k)$ converge a un cammino di estremi (A, B) e questo prova la continuità dell'applicazione \tilde{s}_j , per ogni j .

Infine si vede facilmente che è sezione della mappa π , infatti:

$$\tilde{s}_j(A, B)(0) = \gamma(0) = A$$

$$\tilde{s}_j(A, B)(1) = \delta(0) = B$$

Si è così provato che $g \leq k$.

Mostriamo ora il viceversa e cioè che a partire da un ricoprimento aperto

U_1, \dots, U_g di $X \times X$ tale che per ogni $i = 1, \dots, g$ esiste una sezione continua $s_i : U_i \rightarrow PX$ della mappa π , è possibile costruire un pianificatore del moto in X .

Poniamo $Y_1 := X \times X - (U_2 \cup \dots \cup U_g)$ e $Z_1 := X \times X - U_1$. Per costruzione Y_1 e Z_1 sono sottoinsiemi di $X \times X$ chiusi (perché complementari di aperti) e disgiunti, possiamo quindi applicare il lemma 1.2.3 e denotare con F_1 il sotto poliedro di $X \times X$ contenente Y_1 e disgiunto da Z_1 (in particolare, per costruzione, $F_1 \subset U_1$). Procediamo ora per induzione: sia $1 < i < g$ e supponiamo di aver costruito F_1, \dots, F_{i-1} sotto poliedri di $X \times X$ con le proprietà sotto indicate:

1. F_j è un poliedro contenuto in U_j per ogni $j = 1, \dots, i - 1$
2. $F_k \cap F_j = \emptyset$ per ogni $k \neq j$
3. la chiusura di ogni F_j è contenuta nell'unione $F_1 \cup \dots \cup F_j$
4. $F_1 \cup \dots \cup F_{i-1} \cup U_i \cup \dots \cup U_g = X \times X$

e mostriamo che è possibile costruire un i -esimo poliedro con le medesime proprietà.

Con le precedenti posizioni l'insieme $P_i := X \times X - (F_1 \cup \dots \cup F_{i-1})$ risulta essere un sottoinsieme aperto del poliedro $X \times X$, quindi è a sua volta un poliedro (per maggiori dettagli vedere [6]). Così, gli insiemi $Y_i := P_i - (U_{i+1} \cup \dots \cup U_g)$ e $Z_i = P_i - U_i$ sono sottoinsiemi di P_i chiusi e disgiunti, per cui possiamo applicare nuovamente il lemma 1.2.3 e denotare con F_i il sottopoliedro di P_i contenente Y_i e disgiunto da Z_i , e provare così il passo dell'induzione. Abbiamo così provato che è possibile costruire iterativamente un ricoprimento di $X \times X$ costituito interamente da g poliedri (quindi da ENR), disgiunti e tali che la mappa $s_i|_{F_i}$, definita a priori su tutto U_i , è ancora una sezione continua della mappa π . Risulta così provata la seconda disuguaglianza $k \leq g$, da cui si ha il risultato cercato. \square

Definizione 1.6. Dato X un qualsiasi spazio topologico, si definisce complessità topologica di X il genere di Schwarz della fibrazione $\pi : PX \rightarrow X \times X$. In simboli: $TC(X) := g(\pi)$.

1.3 Complessità Relativa

Definizione 1.7. Sia X uno spazio topologico e A un sottospazio di $X \times X$. Sia poi $\pi_A : P_A X \rightarrow A$ la fibrazione π definita nei paragrafi precedenti ristretta all'insieme $P_A X$ dei cammini continui su X con estremi in A , si definisce **complessità relativa di A in X** nel seguente modo:

$$TC_X(A) := g(\pi_A)$$

Osservazione 4. Equivalentemente possiamo considerare $TC_X(A)$ come il più piccolo intero k per cui esiste un ricoprimento di A tale che per ogni j le due proiezioni $p_j^1 : U_j \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \in X$ e $p_j^2 : U_j \ni (\alpha, \beta) \mapsto \beta \in X$ sono tra loro omotope.

Dimostrazione. Sia U_j aperto di A come nella definizione e sia s_j la sezione continua di π definita su U_j , allora, per definizione di sezione, $\forall (\alpha, \beta) \in U_j \subset A \subset X \times X$ si ha $s_j(\alpha, \beta) = \gamma_{(\alpha, \beta)}$ cammino continuo su X tale che $\gamma(0) = \alpha$ e $\gamma(1) = \beta$. Consideriamo quindi l'applicazione:

$$\begin{aligned} F_j : U_j \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ ((\alpha, \beta); t) &\longmapsto F_j((\alpha, \beta); t) := s_j(\alpha, \beta)(t) \end{aligned}$$

è ben definita e continua rispetto a tutte le variabili in quanto, per un risultato di topologia generale, è sufficiente che: per ogni (α, β) fissato, $F_j((\alpha, \beta); -)$ sia continua rispetto a t ; la mappa $(\alpha, \beta) \mapsto F_j((\alpha, \beta); -)$ sia continua rispetto ad $(\alpha, \beta) \in U_j$ e $[0, 1]$ sia localmente compatto. Si ha, quindi, che F_j è un'omotopia per ogni $j = 1, \dots, k$.

Inoltre per ogni (α, β) si ha:

$$F_j((\alpha, \beta); 0) = s_j(\alpha, \beta)(0) = \alpha = p_j^1(\alpha, \beta)$$

$$F_j((\alpha, \beta); 1) = s_j(\alpha, \beta)(1) = \beta = p_j^2(\alpha, \beta)$$

Quindi $F_j(-; 0) = p_j^1$ e $F_j(-; 1) = p_j^2$, cioè $p_j^1 \sim p_j^2$.

D'altra parte se p_j^1 è omotopa a p_j^2 allora esiste una mappa F_j come sopra, e ponendo $s_j(\alpha, \beta)(t) = F_j((\alpha, \beta); t) \forall t \in [0, 1]$ si trova proprio una sezione continua di π_A su U_j . Vale infatti:

$$\begin{aligned} (\pi_A \circ s_j)(\alpha, \beta) &= (s_j(\alpha, \beta)(0), s_j(\alpha, \beta)(1)) = (F_j((\alpha, \beta); 0), F_j((\alpha, \beta); 1)) = \\ &= (p_j^1(\alpha, \beta), p_j^2(\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta) = id_{U_j}(\alpha, \beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in U_j \end{aligned}$$

□

La complessità relativa è strettamente legata alla relazione di omotopia tra le proiezioni parziali degli aperti che ricoprono il sottospazio di $X \times X$. Il seguente lemma fornisce una caratterizzazione specifica per i sottospazi a complessità unitaria.

Lemma 1.3.1. *Sia $A \subset X \times X$ allora sono equivalenti:*

- (i) $TC_X(A) = 1$;
- (ii) le proiezioni $p^1 : A \rightarrow X$ e $p^2 : A \rightarrow X$ sono omotope;
- (iii) la mappa inclusione $i : A \rightarrow X \times X$ è omotopa a una mappa $f : A \rightarrow X \times X$ tale che $f(A) \subset \Delta_X \subset X \times X$.

Dimostrazione. (i) \Leftrightarrow (ii) segue banalmente dall'osservazione precedente in quanto se $TC_X(A) = 1$ significa che il ricoprimento aperto è costituito dal solo insieme A e quindi le proiezioni sono omotope. Viceversa se le proiezioni totali sono omotope significa che $k = 1$ cioè che il ricoprimento di A è costituito da un solo aperto.

Mostriamo ora che (ii) \Rightarrow (iii).

Viceversa (iii) \Rightarrow (ii).

Per ipotesi si ha che $i = (p^1, p^2) : A \rightarrow X \times X$ è omotopa a $f = (f_1, f_2) : A \rightarrow X \times X$ e quindi si ha $p^1 \sim f_1$ e $p^2 \sim f_2$. Poiché f ha valori in Δ_X si ha che $f_1 = f_2$ e quindi $p^1 \sim p^2$. □

Per ora il concetto di complessità relativa è abbastanza astratto, non ha quella forte interpretazione fisica che invece caratterizza la complessità topologica. Cerchiamo quindi di dar maggior concretezza a questa nuova quantità enfatizzandone le relazioni con la complessità topologica.

Proposizione 1.3.2. *Sia $A \subset X \times X$ allora si hanno le seguenti disuguaglianze:*

(a) $TC_X(A) \leq TC(X)$ e in particolare $TC_X(A) = TC(X)$ se $A = X \times X$.

(b) Se $A \subset B \subset X \times X$ allora $TC_X(A) \leq TC_X(B)$.

(c) Se Y è un sottospazio di X allora $TC_X(Y \times Y) \leq TC(Y)$.

Dimostrazione. (a). Chiaramente si ha $TC(X) = TC_X(X \times X)$ in quanto $TC_X(X \times X) = g(\pi_{X \times X})$ ma $g(\pi_{X \times X}) = g(\pi) = TC(X)$, da cui si ha il risultato. Consideriamo ora un generico sottoinsieme A di $X \times X$, si avrà $P_A X \subset P_{X \times X} X$ e quindi $g(\pi_A) \leq g(\pi_{X \times X}) = g(\pi)$ da cui $TC_X(A) \leq TC(X)$.

(b). Se $A \subset B$ allora da ogni ricoprimento aperto di B si può ricavare un ricoprimento aperto di A con un numero minore uguale di aperti (basta considerare l'intersezione degli aperti del ricoprimento con A stesso) e con le stesse proprietà. Ne segue $TC_A(X) \leq TC_B(X)$.

(c). Sia Y sottospazio di X , allora, per definizione:

$$TC_X(Y \times Y) = g(\pi_{Y \times Y}) = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid \exists V_1, \dots, V_r \text{ ricoprimento aperto di } Y \times Y \text{ tale che per ogni } l \in \{1, \dots, r\} \text{ esiste una sezione continua } \tilde{s}_l \text{ di } \pi_{Y \times Y} : P_{Y \times Y} X \ni \delta \mapsto (\delta(0), \delta(1)) \in Y \times Y\}.$$

$$TC(Y) = g(\pi) = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \exists U_1, \dots, U_k \text{ ricoprimento aperto di } Y \times Y \text{ tale che per ogni } j \in \{1, \dots, k\} \text{ esiste una sezione continua } s_j \text{ di } \pi : PY \ni \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \in Y \times Y\}.$$

Poiché $Y \subset X$ ogni cammino su Y è un cammino su X con estremi in Y , cioè $PY \subset P_{Y \times Y} X$. Ne segue che i ricoprimenti di $Y \times Y$ che appartengono all'insieme di definizione di $TC(Y)$, appartengono anche all'insieme di definizione di $TC_X(Y \times Y)$ perché $\pi_{Y \times Y} \circ s_j = id|_{U_j}$ per ogni $j = 1, \dots, k$. Quindi, poiché il minimo è una funzione decrescente, si ha che $TC_X(Y \times Y) \leq TC(Y)$. \square

1.4 Invarianza Omotopica della Complessità Topologica

Nei paragrafi precedenti abbiamo osservato che esiste una relazione tra proprietà omotopiche degli spazi (in particolare la contraibilità) e complessità topologica. Ci proponiamo ora di mostrare che la complessità topologica è un'invariante per omotopia e cioè che vale il seguente teorema:

Teorema 1.4.1. *Dati X e Y due spazi topologici, se $X \sim Y$ allora $TC(X) = TC(Y)$.*

La dimostrazione di questo teorema passa attraverso alcuni lemmi.

Lemma 1.4.2. *Sia X uno spazio topologico e siano $A \subset B \subset X \times X$ tali che B può essere deformato⁷ in A , allora $TC_X(A) = TC_X(B)$.*

Dimostrazione. Dal punto (b) della proposizione 1.3.2, sappiamo già che $TC_X(A) \leq TC_X(B)$. Rimane da mostrare che vale anche la disuguaglianza opposta.

Poniamo $k := TC_X(A)$, allora, per definizione, esistono U_1, \dots, U_k aperti che ricoprono A tali che per ogni $i = 1, \dots, k$ le proiezioni $p_i^1 : U_i \rightarrow X$ e $p_i^2 : U_i \rightarrow X$ sono omotope. Esiste quindi, per ogni i , un'omotopia $F_i : U_i \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che $F_i((a, b), 0) = p_i^1(a, b) = a$ e $F_i((a, b), 1) = p_i^2(a, b) = b$.

Per ipotesi, poiché B può essere deformato in A , esiste un'omotopia H tale che la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow C(B, X \times X) \\ t &\longmapsto H(-, t); \\ 0 &\longmapsto H(-, 0) = \iota \text{ mappa inclusione}; \\ 1 &\longmapsto H(-, 1) = h \text{ tale che } h(B) \subset A; \end{aligned}$$

è continua.

⁷Dati due sottospazi di $X \times X$ con $A \subset B$ si dice che **B può essere deformato in A** se esiste un'omotopia $H : B \times [0, 1] \rightarrow X \times X$ tale che $H(-, 0) = i$ (inclusione di B in $X \times X$) e $H(-, 1)$ è una mappa di B in A . Confrontare con [1], pg 100

Poniamo, per ogni $i = 1, \dots, k$, $W_i := h^{-1}(U_i)$ allora i W_i costituiscono un ricoprimento aperto di B in quanto la mappa h è continua (per definizione di omotopia).

Per ogni $(x, y) \in W_i$, l'omotopia $H((x, y), -)$ può essere vista come una coppia di cammini (γ_x, δ_y) continui in $X \times X$ (uno per ogni componente) con estremi (x, y) e $h(x, y) =: (a, b) \in U_i$, cioè: $H((x, y), t) = (\gamma_x(t), \delta_y(t))$ con $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(1) = a$, $\delta_y(0) = y$ e $\delta_y(1) = b$.

Ricordando che anche l'omotopia F , per ogni $(a, b) \in X \times X$, può essere vista come un cammino in X con estremi $F((a, b), 0) = a$ e $F((a, b), 1) = b$, consideriamo la seguente applicazione:

$$G_i : W_i \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$((x, y), t) \longmapsto G_i((x, y), t) := \begin{cases} \gamma_x(3t) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ F_i((\gamma_x(1), \delta_y(1)), 3t - 1) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \delta_y(3(1 - t)) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

che è ben definita in quanto nelle intersezioni le funzioni hanno lo stesso valore: se, infatti, $t = \frac{1}{3}$ si ha che $\gamma_x(1) = a = F_i((\gamma_x(1), \delta_y(1)), 0)$, analogo per $t = \frac{2}{3}$.

Mostriamo ora, nei dettagli, che la funzione G così costruita è continua rispetto a tutte le variabili. Per una proposizione nota in topologia generale, un'applicazione G definita sull'insieme $W_i \times [0, 1] = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (dove $S_1 := W_i \times [0, \frac{1}{3}]$, $S_2 := W_i \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $S_3 := W_i \times [\frac{2}{3}, 1]$ costituiscono un ricoprimento del prodotto), dotato della topologia finale⁸ indotta dalle inclusioni $\iota_j : S_j \rightarrow W_i \times [0, 1]$, è continua se e solo se, per ogni j , sono continue le mappe $G \circ \iota_j$. Basta quindi provare che la topologia di $W_i \times [0, 1]$ coincide con la topologia finale indotta dalle inclusioni e che le mappe $G \circ \iota_j$ sono continue per ogni j , da cui, usando la proposizione, seguirà il risultato. Quest'ultima affermazione è banale in quanto, per costruzione, $G \circ \iota_j = G|_{S_j}$ quindi, ad esempio, se $j = 1$, $G|_{S_1} = G|_{W_i \times [0, \frac{1}{3}]} = \gamma_x(3t)$, che è una funzione continua.

⁸Siano X_i, Z spazi topologici e $f_i : X_i \rightarrow Z$ mappe tra questi spazi. Si definisce **topologia finale** su Z indotta dalle f_i quella topologia i cui aperti sono $\{A \subset Z \mid f_i^{-1}(A) \text{ è aperto in } X_i, \forall i\}$.

Per concludere è sufficiente verificare che la famiglia $\{S_1, S_2, S_3\}$ sia localmente finita e che gli insiemi siano chiusi rispetto alla topologia di $W_i \times [0, 1]$, in quanto, in questo caso, una seconda proposizione di topologia generale ci assicura che la topologia di $W_i \times [0, 1]$ coincide con la topologia finale delle inclusioni. Ogni S_j è chiuso rispetto alla topologia di $W_i \times [0, 1]$ (che è la topologia prodotto), in quanto è il complementare rispetto a $W_i \times [0, 1]$ di un aperto (W_i è aperto in W_i , $(\frac{1}{3}, 1]$ è aperto in $[0, 1]$ per la topologia indotta, quindi, $W_i \times (\frac{1}{3}, 1]$ è un aperto della topologia prodotto). D'altra parte, ogni punto di $W_i \times [0, 1]$ è interno a un S_j oppure in una intersezione di due S_j , in entrambi i casi è possibile trovare un intorno del punto che intersechi un numero finito di elementi della famiglia (rispettivamente uno o due); si ha quindi che la famiglia $\{S_j\}_{j=1,2,3}$ è localmente finita.

La mappa G è quindi ben definita e continua, cioè è un'omotopia tra:

$$G_i((x, y), 0) = \gamma_x(0) = x = q_i^1(x, y)$$

$$G_i((x, y), 1) = \delta_y(0) = y = q_i^2(x, y)$$

dove q_i^1 e q_i^2 sono le i -esime proiezioni di W_i rispettivamente sulla prima e seconda componente.

Abbiamo così provato che le proiezioni del ricoprimento W_i sono tra loro omotope e quindi, passando ai minimi, si trova $TC_X(B) \leq k$. \square

Lemma 1.4.3. *Siano X, Y spazi topologici tale che $Y \subset X$ è un retratto⁹, allora $TC(Y) \leq TC(X)$.*

Dimostrazione. Sia $k = TC(X)$ e consideriamo U_1, \dots, U_k un ricoprimento aperto di $X \times X$ tale che per ogni $j = 1, \dots, k$ è ben definita $s_j : U_j \rightarrow PX$ sezione continua della mappa π . Poiché gli U_i ricoprono $X \times X$ ed $Y \times Y$ è contenuto in $X \times X$ si ha che gli insiemi $V_i := U_i \cap (Y \times Y)$ costituiscono un ricoprimento aperto di $Y \times Y$. Sia ora $r : X \rightarrow Y$ la retrazione, allora per ogni $(x, y) \in V_i$ la mappa $r \circ s_i$ è una sezione locale di π , infatti: $r(s_i(x, y)(t))$

⁹Un sottospazio $A \subset X$ si dice **retrato di X** se esiste una mappa continua (detta retrazione) $r : X \rightarrow A$ tale che $r|_A = id_A$. Per maggiori dettagli vedere [2].

è l'immagine, mediante una funzione continua, di un cammino continuo su X e quindi è ancora un cammino continuo nello spazio immagine, cioè in Y . Ne segue quindi che $TC(Y) \leq k$. \square

Corollario 1.4.4. *Siano X, Y spazi topologici tali che Y è un retratto di X e X può essere deformato¹⁰ in Y , allora $TC(X) = TC(Y)$.*

Dimostrazione. Dal lemma 1.4.3 si ha che $TC(Y) \leq TC(X)$.

D'altra parte dal lemma 1.4.2 si ha che $TC_X(Y \times Y) = TC_X(X \times X) = TC(X)$ e dalla disuguaglianza (c) della proposizione 1.3.2 si ha che $TC_X(Y \times Y) \leq TC(Y)$, da cui $TC(X) \leq TC(Y)$. \square

Osservazione 5. Se Y è un retratto per deformazione di X allora $Y \sim X$.

Dimostrazione. Per dimostrare che $X \sim Y$ bisogna verificare che esistono due mappe (da X in Y e viceversa) tali che, composte, siano omotope alle identità in X e in Y .

Consideriamo quindi come mappe la retrazione $r : X \rightarrow Y$ e l'inclusione $i : Y \rightarrow X$ allora, per definizione di deformazione, sappiamo già che esiste un'omotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che $H(-, 0) = id_X$ e $H(-, 1) = i \circ r$. Rimane solo da verificare che $r \circ i \sim id_Y$ ma questo è banale poiché, per definizione di retrazione, $r \circ i = r|_Y = id_Y$. \square

Il corollario fornisce una dimostrazione del teorema nel caso di spazi la cui equivalenza omotopica è data da una retrazione per deformazione. Ma cosa possiamo dire in generale? La risposta è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.4.5. *Due spazi topologici X, Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se esiste un terzo spazio Z di cui X e Y sono retratti per deformazione.*

E questo ci permette, finalmente, di completare la dimostrazione del teorema.

¹⁰In alcuni testi queste due condizioni sono unite nella definizione di **retratto per deformazione**.

Dimostrazione. (Teorema 1.4.1)

Dalla proposizione 1.4.5 e dal corollario 1.4.4 segue subito che se $X \sim Y$ allora $TC(X) = TC(Y)$. \square

Per concludere, rimane da dimostrare la proposizione 1.4.5.

Dimostrazione. Un lato dell'implicazione è dato dall'osservazione 5, rimane da mostrare il viceversa e cioè che due spazi omotopicamente equivalenti sono retratti per deformazione di un terzo spazio topologico.

Supponiamo che $X \sim Y$ cioè supponiamo che esista una equivalenza omotopica $f : X \rightarrow Y$. Consideriamo come terzo spazio M_f il mapping cylinder costruito a partire da X, Y e f :

$$M_f := \frac{(X \times [0, 1]) \amalg Y}{(x, 1) \sim f(x)}$$

e verifichiamo che sia X che Y sono ottenibili da M_f mediante una retrazione per deformazione.

Partiamo da Y . Per costruzione di M_f si hanno i seguenti omeomorfismi:

$$\omega : X \longrightarrow X \times \{0\} \equiv \omega(X) \subset M_f$$

$$\iota : Y \longrightarrow \iota(Y) \subset M_f$$

Siano poi $j : \iota(Y) \rightarrow M_f$ la mappa inclusione, ed r la seguente applicazione:

$$r : M_f \longrightarrow \iota(Y)$$

$$m \longmapsto r(m) := \begin{cases} [f(x)] & \text{se } m = [(x, t)] \text{ con } t \in [0, 1], x \in X \\ m & \text{altrimenti, cioè se } m \in \iota(Y) \subset M_f \end{cases}$$

Allora, r è una retrazione in quanto è l'identità su $\iota(Y)$ ed è continua, infatti: $(x, 1) \sim f(x) \forall x \in X$ cioè appartengono alla stessa classe di equivalenza e quindi $r([(x, 1)]) = [f(x)] = [(x, 1)]$ cioè r agisce come l'identità sulla classe $[(x, 1)]$; d'altra parte se considero $[(x, 1)] = [f(x)] \in \iota(Y) \subset M_f$ avrò ancora

che r agisce come l'identità.

Infine $j \circ r$ è omotopicamente equivalente a id_{M_f} , infatti:

$$H : M_f \times [0, 1] \rightarrow M_f$$

$$(m, s) \mapsto H(m, s) := \begin{cases} [x, (1-s)t + s] & \text{se } m = [(x, t)] \\ m & \text{se } m \in \iota(Y) \end{cases}$$

è ben definita e continua, inoltre $H(-, 0) = id_{M_f}$ e $H(-, 1) = j \circ r$. Ne segue quindi che $\iota(Y)$ è un retratto per deformazione di M_f , da cui $Y \cong \iota(Y) \sim M_f$, perciò Y è un retratto per deformazione di M_f , a meno di omeomorfismi.

Fino ad ora non abbiamo utilizzato l'ipotesi di equivalenza omotopica tra gli spazi, infatti il risultato trovato è del tutto generale e valido per ogni coppia di spazi X, Y e per ogni applicazione continua $f : X \rightarrow Y$. Per dimostrare l'analogo risultato per lo spazio X , invece, è necessario (e sufficiente) supporre che X e Y siano omotopicamente equivalenti.

Innanzitutto osserviamo che se f è un'equivalenza omotopica tra X e Y , allora $\tilde{f} := \omega^{-1} \circ f \circ \iota$ è un'equivalenza omotopica tra $\omega(X) \subset M_f$ e $\iota(Y) \subset M_f$. Inoltre, per costruzione di r , si ha che $\tilde{f} = r \circ i$ (dove i è l'inclusione di $\omega(X)$ in M_f), e poiché sia r che \tilde{f} sono equivalenze omotopiche, lo è necessariamente anche i . Ne segue quindi che $X \cong \omega(X) \sim M_f$, e quindi anche X è un retratto per deformazione di M_f , a meno di omeomorfismi, e questo conclude la dimostrazione.

□

Capitolo 2

Nastro di Möbius e Cilindro a confronto

In questo capitolo ci proponiamo di calcolare esplicitamente la complessità topologica del bordo del nastro di Möbius relativamente al nastro stesso, e delle due circonferenze di bordo del cilindro relativamente al cilindro. In altre parole, se indichiamo con N il nastro di Möbius, con ∂N il suo bordo e rispettivamente con C il cilindro e con ∂C il suo bordo, ciò che ci proponiamo di calcolare sono le seguenti quantità:

$$TC_N(\partial N \times \partial N)$$
$$TC_C(\partial C \times \partial C)$$

2.1 Complessità Topologica Relativa del Cilindro

Proviamo inizialmente un risultato generale che ci permetterà di calcolare la complessità topologica del bordo del cilindro relativamente al cilindro stesso.

Teorema 2.1.1. *Sia X uno spazio topologico e consideriamo il cilindro Y costruito sullo spazio dato: $Y = X \times [0, 1]$. Sia poi $A := (X \times \{0\}) \times (X \times \{1\})$,*

allora si ha:

$$TC(X) = TC_Y(A)$$

Dimostrazione. Proviamo il risultato mediante le due disuguaglianze.

Consideriamo la seguente retrazione del cilindro in una delle due basi:

$$\begin{aligned} r : Y \equiv X \times [0, 1] &\rightarrow X \times \{1\} \cong X \\ (x, t) &\mapsto r(x, t) := (x, 1) \end{aligned}$$

e mostriamo che $X \times \{1\}$ è un retratto per deformazione di Y , infatti la mappa:

$$\begin{aligned} H : Y \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ ((x, t), s) &\mapsto H((x, t), s) := (x, (1-s)t + s) \end{aligned}$$

è un'omotopia tra l'identità su Y e la retrazione r sopra definita. Si ha quindi, per il teorema dimostrato nel capitolo precedente, che

$$TC(Y) = TC(X \times \{1\}) = TC(X)$$

da cui segue subito che:

$$TC_Y(A) \leq TC_Y(Y \times Y) = TC(Y) = TC(X).$$

D'altra parte poniamo $k = TC_Y(A)$, si ha quindi che esiste un ricoprimento di A in $Y \times Y$ costituito da k aperti U_1, \dots, U_k tali che, per ogni j , esiste un'omotopia $F_j : U_j \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F_j(-, 0) = p_j^1 : U_j \rightarrow Y$ (proiezione sulla prima componente) e $F_j(-, 1) = p_j^2 : U_j \rightarrow Y$ (proiezione sulla seconda componente).

Poiché gli U_j costituiscono un ricoprimento di $A = (X \times \{0\}) \times (X \times \{1\})$ avremo che i $p_j^1(U_j)$ costituiscono un ricoprimento di $X \times \{0\}$ e i $p_j^2(U_j)$ un ricoprimento di $X \times \{1\}$, in particolare, a meno di omeomorfismi, costituiscono entrambi un ricoprimento di X di k aperti¹ ciascuno. Indichiamo con f l'omeomorfismo tra X e $X \times \{1\}$ e consideriamo la seguente famiglia d'insiemi:

$$V_j := f^{-1}(p_j^2(U_j)) \times f^{-1}(r(p_j^1(U_j)))$$

¹Le proiezioni di un prodotto cartesiano sono aperte rispetto alla topologia prodotto, vedi proposizione 3.9 in [3].

dove r è la retrazione del cilindro nella base superiore sopra descritta. Poiché

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ r : X \times \{0\} \supset p_j^1(U_j) &\xrightarrow{r} X \times \{1\} \xrightarrow{f^{-1}} X \\ (x, 0) &\mapsto (x, 1) \mapsto x \end{aligned}$$

agisce come una proiezione sulla prima componente, è continua ed aperta². Si ha così che anche i V_j costituiscono una famiglia di k aperti che ricoprono $X \times X$.

Fissiamo un punto $(x, y) \in V_j$, il corrispondente punto nell'aperto U_j sarà $((x, 0); (y, 1))$, e si ha che la mappa:

$$s_j(x, y)(-) := (f^{-1} \circ r \circ F_j)((x, 0); (y, 1)), -)$$

è un cammino su X di estremi (x, y) , in quanto:

$$\begin{aligned} s_j(x, y)(0) &= (f^{-1} \circ r \circ F_j)((x, 0); (y, 1)), 0) = \\ &= (f^{-1} \circ r \circ p_j^1)((x, 0); (y, 1)) = \\ &= (f^{-1} \circ r)(x, 0) = \\ &= f^{-1}(x, 1) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j(x, y)(1) &= (f^{-1} \circ r \circ F_j)((x, 0); (y, 1)), 1) = \\ &= (f^{-1} \circ r \circ p_j^2)((x, 0); (y, 1)) = \\ &= (f^{-1} \circ r)(y, 1) = \\ &= f^{-1}(y, 1) = y \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per ogni $(x, y) \in V_j \subset X \times X$ esiste un cammino continuo in X con estremi in x e y , s_j è quindi una sezione continua della fibrazione $\pi : PX \rightarrow X \times X$ e quindi, per la decrescenza del minimo, $TC(X) \leq k$. \square

Corollario 2.1.2. *Sia X uno spazio topologico, Y il cilindro costruito su X e $B := (X \times \{0, 1\}) \times (X \times \{0, 1\})$, allora si ha che:*

$$TC(X) = TC_Y(B)$$

²ibidem

Dimostrazione. Poiché $X \cong X \times \{1\} \sim Y$ e $B \subset Y \times Y$ si ha che $TC_Y(B) \leq TC_Y(Y \times Y) = TC(Y) = TC(X)$. D'altra parte se consideriamo l'insieme $A = (X \times \{0\}) \times (X \times \{1\})$ si ha che $A \subset B$ quindi, per la proposizione 1.3.2, $TC_Y(A) \leq TC_Y(B)$. Inoltre dal teorema precedente si ha anche che $TC_Y(A) = TC(X)$, da cui $TC(X) \leq TC_Y(B)$. \square

Dal teorema e dal corollario segue subito il risultato cercato:

Corollario 2.1.3. *Sia $C = S^1 \times [0, 1]$ il cilindro e sia $\partial C := S^1 \times \{0, 1\}$ il suo bordo, allora:*

$$TC_C(\partial C \times \partial C) = 2$$

Dimostrazione. Il risultato segue direttamente dal corollario precedente ponendo $X = S^1$, $Y = C$, $B = \partial C \times \partial C$ e ricordando dal capitolo precedente che $TC(S^1) = 2$. \square

2.2 Complessità Topologica Relativa del Nastro di Möbius

Rimane da calcolare la complessità topologica del bordo del nastro di Möbius relativamente al nastro stesso.

Teorema 2.2.1. *Sia N il nastro di Möbius, indicando con ∂N il suo bordo si ha*

$$TC_N(\partial N \times \partial N) = 2$$

Dimostrazione. Osserviamo inizialmente che $TC(N) = 2$ in quanto il nastro di Möbius N è omotopo alla circonferenza S^1 , la cui complessità topologica è stata calcolata nel capitolo precedente.

Inoltre dal punto (b) della 1.3.2 si ha che $TC_N(\partial N \times \partial N) \leq TC_N(N \times N) = TC(N) = 2$. Per provare il risultato è quindi sufficiente provare che $TC_N(\partial N \times \partial N) \neq 1$, o meglio, ricordando il lemma 1.3.1 del capitolo

precedente, basterà provare la non validità di una qualsiasi delle due affermazioni equivalenti. In questa dimostrazione si procederà a negare la seguente affermazione:

le proiezioni $p^1 : \partial N \times \partial N \rightarrow N$ e $p^2 : \partial N \times \partial N \rightarrow N$ sono omotope.

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che le due proiezioni p^1 e p^2 siano tra loro omotope, cioè supponiamo che esista un'omotopia

$$F : \partial N \times \partial N \times [0, 1] \longrightarrow N$$

tale che $F(-; 0) = p^1$ e $F(-; 1) = p^2$.

Poiché ∂N è omeomorfo a S^1 , indicando con f questo omeomorfismo, possiamo considerare la mappa:

$$\tilde{F} := F \circ (f^{-1} \times f^{-1} \times id_{|[0,1]}) : S^1 \times S^1 \times [0, 1] \longrightarrow N$$

che risulta essere continua in tutte le sue variabili (è infatti composizione di funzioni continue³) ed inoltre è ancora un'omotopia tra le due proiezioni $\tilde{p}^1 := p^1 \circ (f^{-1} \times f^{-1}) : S^1 \times S^1 \rightarrow N$ e $\tilde{p}^2 := p^2 \circ (f^{-1} \times f^{-1}) : S^1 \times S^1 \rightarrow N$.

Consideriamo ora le relazioni di equivalenza indotte dalle mappe \tilde{p}^1 e \tilde{p}^2 sull'insieme $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$:

$$((\alpha, \beta), t) \sim_1 ((\gamma, \delta), t') \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 = t' \\ \tilde{p}^1(\alpha, \beta) = \tilde{p}^1(\gamma, \delta) \end{cases}$$

³La continuità segue dalla definizione categorica di prodotto di spazi topologici. Indichiamo con $X := \partial N \times \partial N$, con $X' := S^1 \times S^1$ e con $f : \partial N \rightarrow S^1$, allora, per definizione, esiste una terza applicazione $\tilde{f} : X \rightarrow X'$ tale che renda commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \partial N \times \partial N & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^1 \times S^1 \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi'_i \\ \partial N & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

dove φ_i indicano le proiezioni sui fattori del prodotto. La mappa così ottenuta è naturalmente continua e si indica con $\tilde{f} \equiv f \times f$. Analogo ragionamento tra $f \times f$ e $id_{|[0,1]}$.

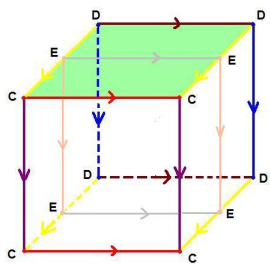
$$((\alpha, \beta), t) \sim_2 ((\gamma, \delta), t') \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 = t' \\ \tilde{p}^2(\alpha, \beta) = \tilde{p}^2(\gamma, \delta) \end{cases}$$

e consideriamo lo spazio topologico ottenuto da $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ quozientando con entrambe le relazioni e dotato della topologia quoziente, l'unica che rende continua la proiezione sul quoziente Π . Ora, poiché la mappa \tilde{F} è per definizione costante sulle classi d'equivalenza, passa al quoziente e si fattorizza nel modo seguente $\tilde{F} = G \circ \Pi$ con G necessariamente continua:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{F}} & N \\ \Pi \downarrow & & G \nearrow \\ \underline{S^1 \times S^1 \times [0, 1]} & & \\ \sim & & \end{array}$$

Cerchiamo ora di capire meglio come è fatto lo spazio quoziente. $S^1 \times S^1$ è la superficie di un toro (vuoto), possiamo quindi pensare a $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ come ad un solido costituito dall'ispessimento di una superficie, cioè costituito da più strati continui: lo strato più interno è dato da $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ e quello più esterno da $S^1 \times S^1 \times \{1\}$. Utilizzando la rappresentazione delle superfici tramite l'identificazione dei lati di un poligono possiamo seguire in figura le successive fattorizzazioni.

La prima figura mostra la rappresentazione del solido inspessito: i vertici con la stessa etichetta sono identificati così come i lati dello stesso colore. La faccia colorata di verde indica che è piena e quindi che fa parte del solido, così come la rispettiva faccia di base anche se non colorata.

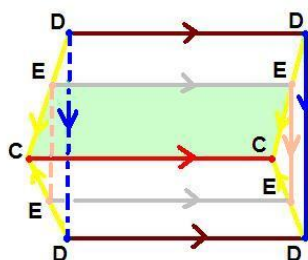


La faccia più interna $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ è quella contrassegnata dai vertici **C** mentre quella contrassegnata dai vertici **E** indica uno strato intermedio, precisamente $S^1 \times S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$, che ci sarà utile per capire la struttura del quoziente.

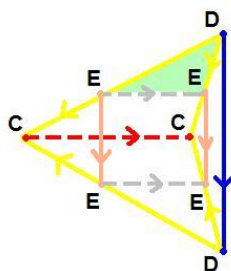
Procediamo alla prima identificazione data dalla relazione \sim_1 : i punti della superficie più interna che hanno la medesima prima componente sono

tutti identificati. Nel disegno la faccia contrassegnata dai vertici **C** è collasata ad un solo segmento rosso in quanto le componenti viola sono state tra loro identificate.

Se guardiamo alla superficie descritta dai vertici **C** ed **E** notiamo che si tratta di un toro pieno in accordo con quanto ci suggerisce l'intuizione: tagliando il toro spesso lungo lo strato $S^1 \times S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$ otteniamo ancora due tori spessi; consideriamo il primo e collassiamo la superficie più interna, $S^1 \times S^1 \times \{0\}$, lungo un parallelo, cioè che otteniamo è un toro pieno.



Procediamo con la seconda identificazione data dalla relazione d'equivalenza \sim_2 : i punti della superficie più esterna che hanno uguale la seconda componente (cioè la seconda proiezione) sono tutti identificati. Nel disegno la faccia contrassegnata dai vertici **D** è collassata al solo segmento blu, cioè all'insieme dei punti le cui seconde componenti sono tutte distinte.



Come prima, se consideriamo la superficie individuata dai vertici **D** ed **E** notiamo, anche se con un po' più di difficoltà (dovuta al fatto che stiamo collassando il toro lungo un meridiano e non lungo un parallelo), che individua ancora un toro pieno.

Quello che abbiamo ottenuto nell'ultima figura è la rappresentazione del quoziente; in particolare, abbiamo notato che è composto da due tori pieni (quello contrassegnato dai vertici **C** ed **E**, e quello contrassegnato dai vertici **D** ed **E**) che hanno un toro come superficie comune (contrassegnato dai vertici **E**). Questa rappresentazione del quoziente ci permette, usando la teoria delle rappresentazioni di Heegaard di una varietà tridimensionale⁴, di riconoscere

⁴Per maggiori informazioni vedere il capitolo 2 in [7].

a quale 3-varietà nota è omeomorfo il quoziente. Infatti, poiché i tori pieni sono 3-varietà di genere 1 (un toro pieno è omeomorfo a una 2-sfera piena con un manico e il numero di manici identifica il genere della varietà; per maggiori dettagli vedere [7]), per la teoria di Heegaard, il quoziente ha necessariamente genere minore o uguale a 1.

Rimane quindi da capire se il quoziente ha genere 0 oppure 1, e per farlo è sufficiente studiare il comportamento dei generatori del gruppo di Poincaré della superficie comune, nel nostro caso il toro contrassegnato dai vertici **E**, immersi nei due fattori dello spezzamento di Heegaard, nel nostro caso i tori pieni. Guardiamo al segmento grigio: immerso nel toro identificato dai vertici **D** ed **E** corrisponde a una curva omotopa a un parallelo e quindi la rispettiva classe di equivalenza genera il gruppo di Poincaré; immerso invece nel toro identificato dai vertici **C** ed **E**, corrisponde a una curva equatoriale nullomotopa e quindi con classe di equivalenza nulla nel gruppo di Poincaré. Analogo ragionamento vale per il segmento rosa ma con risultati opposti. Questo comportamento delle curve generatrici di $\Pi(S^1 \times S^1)$ identifica⁵ univocamente S^3 , per cui si ha che la varietà quoziente ottenuta è omeomorfa a S^3 .

Ora che abbiamo capito come è fatto il quoziente, guardiamo alla mappa G . In particolare, poiché $\tilde{F}(-, 0) = \tilde{p}^1$ e $\tilde{F}(-, 1) = \tilde{p}^2$ mappano omeomorficamente S^1 in ∂N , anche la mappa G ristretta alle classi $\{[(\alpha, \beta), 0]_{\sim_1} : (\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1\}$ (nella figura il segmento rosso) e $\{[(\alpha, \beta), 1]_{\sim_2} : (\alpha, \beta) \in S^1 \times S^1\}$ (nella figura il segmento blu) le mapperà omeomorficamente nel bordo del nastro di Möbius. Ma, se si considera il morfismo di gruppi indotto dalla mappa G sui gruppi fondamentali rispettivamente del quoziente e del nastro, si avrà che l'unico morfismo possibile è il morfismo nullo:

$$\bar{G} : 0 \cong \Pi_1(S^3) \longrightarrow \Pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$$

D'altra parte, per le osservazioni precedenti, indicando con γ e δ le circonferenze costituenti il link di Hopf del quoziente (i segmenti, con vertici

⁵Per maggiori dettagli vedere [7], capitolo 2, esercizio 2.11.

identificati, rosso e blu), si ha che:

$$\begin{aligned}\bar{G}: \Pi_1(S^3) &\longrightarrow \Pi_1(N) \\ [\gamma] &\longmapsto [G(\gamma)] = [\delta N] = 2[\alpha] = 2\mathbb{Z} \\ [\delta] &\longmapsto [G(\delta)] = [\delta N] = 2[\alpha] = 2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

il bordo del nastro, infatti, si avvolge due volte attorno alla circonferenza centrale, indicata con α , che genera il gruppo di Poincaré.

Da quanto precede si ha quindi che l'omomorfismo nullo \bar{G} ha immagine $2\mathbb{Z}$ e questo è assurdo. Una siffatta mappa non può quindi esistere, per cui non può esistere una mappa G con le caratteristiche sopra riportate, da cui l'assurdo di aver supposto che esistesse l'omotopia F tra le proiezioni.

Si è così provato che $TC_N(\partial N \times \partial N) \neq 1$, da cui necessariamente, $TC_N(\partial N \times \partial N) = 2$. □

Conclusioni

In questa tesi abbiamo calcolato la complessità topologica di cilindro e nastro di Möbius relativa ai loro bordi. Si sperava che risultassero diverse, e quindi discriminanti tra i due spazi, invece sono risultate entrambe uguali a due. E' possibile che gli accorgimenti utilizzati per questo calcolo vengano in futuro utilizzati anche per altri spazi.



A. F. Möbius.



Bibliografia

- [1] Michael Farber, *Invitation to Topological Robotics*, European Mathematical Society, 2008
- [2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini *Lezioni di Topologia Generale*, Feltrinelli, 1976.
- [4] M. Coste, *An Introduction to Semialgebraic Geometry*, Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di ricerca in Matematica, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa 2000.
- [5] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1972.
- [6] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-linear topology*, Springer-Verlag, 1972.
- [7] J. Hempel, *3-Manifolds*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton New Jersey 1976.

