

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**DIFFERENZE TOPOLOGICHE
FRA GLI SPAZI DEI COLORI
NELLE DIVERSE FORME
DI DALTONISMO**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
ELEONORA GALASSI

Correlatore:
Dott.ssa
CARLA MOLINOTTI

Sessione I
Anno Accademico 2007-2008

*A chi ha sempre creduto che ce la potessi fare,
anche quando non ne ero convinta e avrei buttato all'aria tutti
gli sforzi fatti...*

Grazie papà!

Introduzione

Se c'è una cosa che fa arrabbiare un daltonico è parlargli come se lui non vedesse i colori. Infatti solo per due rare forme di anomalia si può asserire che la visione sia a toni di grigio. Le più diffuse forme di daltonismo prevedono una visione a colori, che però certamente è diversa da quella di un normovedente. In tutti i casi gli spazi dei colori sono dotati in modo naturale di una topologia, per cui ha senso e può essere interessante confrontarle matematicamente in questo ambito.

Questa tesi indaga i tipi di omeomorfismo degli spazi dei colori di umani normovedenti, protanopi, deuteranopi, tritanopi, acromati e perfino degli uccelli.

Dopo una necessaria panoramica sull'evoluzione della visione cromatica negli animali superiori, il secondo capitolo analizza le tipologie e le cause di daltonismo umano. Il terzo capitolo richiama la nozione di spazio topologico quoziente e la applica all'individuazione e al confronto degli spazi topologici dei colori nelle diverse situazioni.

Indice

Introduzione	i
1 La visione dei colori negli animali	1
1.1 La percezione dei colori	1
1.2 Evoluzione della percezione dei colori nei mammiferi	2
1.3 La percezione dei colori negli uccelli	3
2 La percezione dei colori nell'uomo e il daltonismo	5
2.1 Cause del daltonismo	5
2.2 Descrizione dei vari tipi di daltonismo	7
2.2.1 Asse rosso-verde	7
2.2.2 Asse blu-giallo	7
2.3 Tricromatici anomali	9
2.4 Assenza di coni	9
3 Differenza topologiche fra gli spazi dei colori nelle varie forme di daltonismo	11
3.1 Spazi quoziente	11
3.2 Esempi	12
3.3 Lo spazio dei colori e le linee di confusione	14
3.4 Caso monodimensionale	18
3.5 Caso bidimensionale	22
Conclusioni	25

Bibliografia	27
Indice delle figure	31

Capitolo 1

La visione dei colori negli animali

1.1 La percezione dei colori

Ciò che gli animali, e quindi anche l'uomo, percepiscono come colore non è una caratteristica intrinseca della luce o della materia di cui sono costituiti gli oggetti, ma una sensazione che viene prodotta nel cervello dalla stimolazione di cellule specializzate (i coni) che si trovano nel fondo dell'occhio, all'interno della retina. Essi contengono un pigmento sensibile ad alcune lunghezze d'onda emesse dalle sorgenti luminose.

Il cervello, però, non interpreta come colore l'informazione che gli giunge, attraverso il nervo ottico, da una singola cellula, né tantomeno quella di un'unica classe di coni. Per avere informazioni complete necessita dell'interazione di almeno due differenti gruppi di queste cellule, sensibili a lunghezze d'onda differenti.

Inoltre più luce raggiunge la retina, maggiore è la quantità di informazioni che giunge al cervello e quindi aumenta così la capacità di distinguere i colori.

1.2 Evoluzione della percezione dei colori nei mammiferi

In molti animali sono presenti quattro gruppi differenti di coni: uno sensibile alle onde lunghe, uno a quelle medie, uno a quelle corte e uno capace di percepire i raggi ultravioletti. Nei mammiferi, però, la situazione è diversa.

Nel mesozoico, infatti, questi animali erano piccoli e conducevano una vita prevalentemente notturna, per la quale si affidavano soprattutto ai bastoncelli, altre cellule fotosensibili presenti nella retina che sono responsabili della visione notturna. A causa di questa vita, i mammiferi persero, nel corso dei secoli, la capacità di produrre fotopigmenti sensibili sia ai raggi ultravioletti, che di notte sono pressoché assenti, che alle onde lunghe.

Dopo la scomparsa dei dinosauri si aprirono nuove prospettive per questi animali. Alcuni di loro ripresero una vita diurna e, oltre a questo, iniziarono a nutrirsi di frutti che raccoglievano dagli alberi.

Per questa nuova vita, però, un solo fotopigmento sensibile alle onde lunghe si rivelò insufficiente: non era infatti possibile distinguere i frutti maturi dalle foglie circostanti in quanto era loro impossibile percepire le differenze di colore nelle tonalità di rosso, giallo e verde.

Lungo la linea evolutiva accadde che, durante la formazione dei gameti, venisse prodotta una copia extra del gene che regola la produzione dei fotopigmenti responsabili della percezione delle onde lunghe. Questo nuovo pigmento si rivelò utile per la sopravvivenza della specie, in quanto questo secondo tipo di coni era sensibile a lunghezze d'onda leggermente diverse e permetteva di distinguere colori presenti nello spettro luminoso che prima non potevano in alcun modo essere individuati.

In questo modo alcuni mammiferi, in particolare i primati e l'uomo, sono diventati tricromatici.

1.3 La percezione dei colori negli uccelli

A differenza dei mammiferi, gli uccelli diurni e alcune specie di rettili e pesci hanno mantenuto la capacità di distinguere anche i colori vicini alle lunghezze d'onda dei raggi ultravioletti.

Oltre ad avere quattro distinte tipologie di coni, una per ognuna delle lunghezze d'onda che venivano percepite dai loro antenati, essi hanno anche, in ciascun cono, una 'vescicola oleosa' leggermente colorata che filtra la luce prima che essa raggiunga i fotopigmenti. Questa caratteristica non è presente nei mammiferi. Le vescicole sono di diversi colori: rosse, gialle, quasi incolori e trasparenti e ciascuna di esse assorbe una determinata lunghezza d'onda, permettendo così agli uccelli di distinguere meglio i colori.

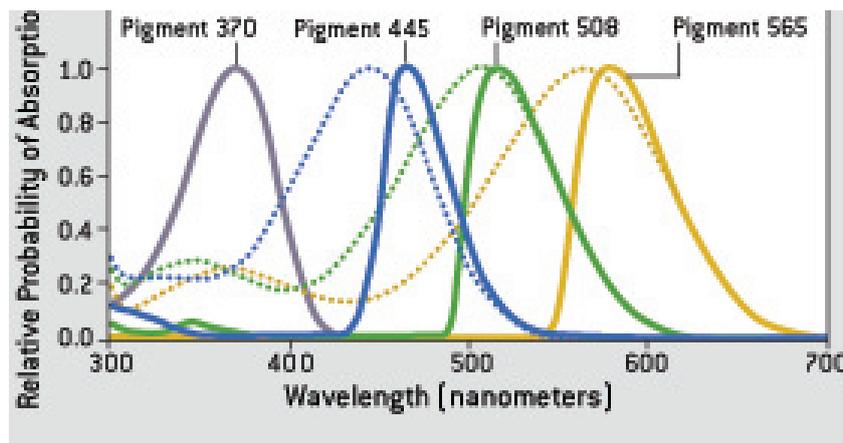


Figura 1.1: In questo disegno sono rappresentate le curve di sensibilità di tutti i fotorecettori presenti negli uccelli, con e senza l'interazione delle vescicole oleose. [2]

Essi, infatti, non distinguono solo l'ultravioletto come colore indipendente, ma questo, in combinazione con gli altri tre fotopigmenti, dà vita a tutta una gamma di colori che l'uomo non può distinguere. Questi risultano essere fondamentali per gli animali in una vasta gamma di attività, dalla ricer-

ca del cibo, dato che alcuni semi riflettono nell'ultravioletto, alla scelta del compagno per la riproduzione.

Capitolo 2

La percezione dei colori nell'uomo e il daltonismo

2.1 Cause del daltonismo

La percezione dei colori dipende da diversi fattori, fra cui i pigmenti dell'oggetto osservato, la lunghezza d'onda del raggio luminoso che lo illumina e l'osservatore stesso.

Negli esseri umani, come in molti mammiferi, sono presenti tre fotopigmenti differenti, sensibili a lunghezze d'onda diverse: uno per il rosso (circa 560 nm), uno per il verde (circa 530 nm) e uno per il blu (circa 420 nm). Dall'interazione di almeno due di queste classi si ottiene la sensazione di colore.

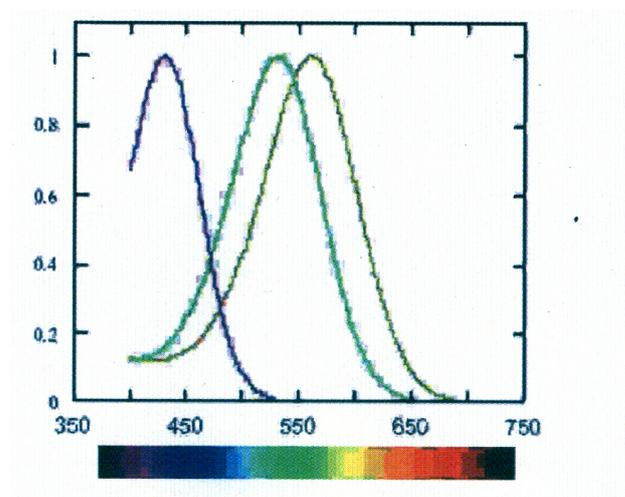


Figura 2.1: Nell'immagine sono rappresentati i picchi di sensibilità dei tre fotorecettori. Come si può notare, per percepire le lunghezze d'onda della maggior parte dello spettro sono necessari due fotopigmenti. [7]

Poiché i geni responsabili della produzione dei fotopigmenti che percepiscono le onde lunghe e medie si sono evoluti a partire dallo stesso gene, situato sul cromosoma X, le forme più comuni di daltonismo sono quelle dovute all'anomalia di uno dei due.

Per quanto riguarda il terzo fotopigmento, invece, esso si trova situato su un altro cromosoma e, pertanto, l'incidenza di questa forma è estremamente più ridotta.

In questi casi si tratta di malattie congenite, ovvero presenti fin dalla nascita, stazionarie e uguali in entrambi gli occhi.

Vi possono poi essere forme acquisite, dovute all'età, a particolari malattie e all'esposizione prolungata ad alcuni agenti chimici. Questi sono casi più rari e, in generale, si possono percepire i colori in modo diverso fra i due occhi e la menomazione può variare nel tempo.

Chi nasce dicromate (ovvero con la presenza di due soli fotopigmenti all'interno della propria retina), non si rende conto di non percepire correttamente i colori, e li chiama pertanto coi nomi giusti, così come gli è stato

insegnato fin da piccolo.

Viceversa, quando l'alterata percezione dei colori subentra in un secondo momento, il colore degli oggetti viene indicato così come viene percepito realmente, cioè in maniera non corretta.

2.2 Descrizione dei vari tipi di daltonismo

Come già accennato, le cause di questo disturbo sono di origine genetica.

Ne esistono di due tipi: uno dovuto all'assenza del fotorecettore per le onde lunghe o per quelle medie; l'altro all'assenza del fotorecettore per le onde corte.

2.2.1 Asse rosso-verde

Le forme più comuni di daltonismo sono quelle legate all'assenza dei coni per le onde lunghe o di quelli per le onde medie.

Questo disturbo è legato al cromosoma X ed è dovuto ad un gene recessivo, che si manifesta, cioè, solo in assenza di geni sani, per questo è più frequente negli uomini che nelle donne. Ha un'incidenza di circa l'8-10% sulla popolazione maschile.

Queste persone hanno difficoltà nel distinguere i colori nei toni dei rossi, dei gialli e dei verdi.

2.2.2 Asse blu-giallo

Questa forma di daltonismo, invece, è molto meno frequente (circa lo 0.002-0.007% della popolazione) ed è dovuta all'assenza dei fotopigmenti che percepiscono le onde corte.

Si tratta di un gene dominante che si trova situato sul settimo cromosoma. La sua incidenza non dipende perciò dal sesso dell'individuo.

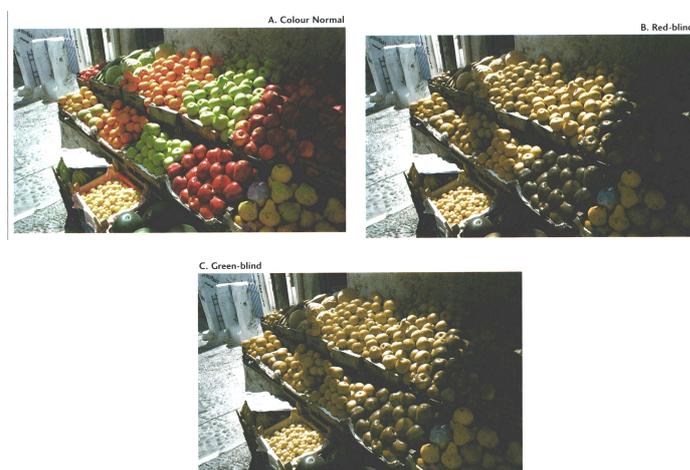


Figura 2.2: A sinistra, l'immagine di una bancarella. Al centro la stessa immagine vista da un protanopo, assenza dei fotorecettori per il rosso, a destra vista da una deuteranopo, assenza dei fotorecettori per il verde. [4]

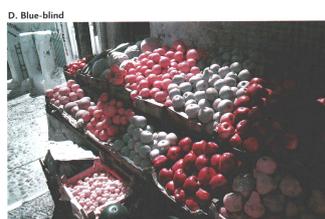


Figura 2.3: La stessa immagine di prima, questa volta vista da un tritanopo, assenza di recettore per il blu. [4]

2.3 Tricromatici anomali

Può anche capitare che una persona, pur possedendo tutti e tre i fotopigmenti, abbia ugualmente problemi a distinguere alcuni colori.

Questo è dovuto al fatto che, in alcuni casi, può capitare che i picchi di sensibilità massima dei fotopigmenti che percepiscono il rosso e il verde siano spostati rispetto al normale. Questo spostamento può causare diversi tipi di disturbi, da quelli meno gravi, in cui la percezione dei colori è pressoché normale (infatti il picco di sensibilità del rosso in questo caso è spostato di pochi nanometri, anche solamente di uno rispetto al normale), a quelli più gravi (quando il picco di sensibilità per il rosso è molto vicino a quello del verde).

In questa tesi non mi occuperò di studiare lo spazio dei colori percepiti da queste persone, poiché il problema è estremamente complicato dato il grande numero di casi differenti possibili.

2.4 Assenza di coni

In rari casi, può capitare che un soggetto non sia in grado di percepire i colori per assenza di almeno due fotopigmenti. Questa situazione viene chiamata acromatopsia.

È un disturbo recessivo che colpisce in uguale misura sia gli uomini che le donne, spesso in famiglie in cui non si sono verificati precedenti casi e, fra le cause, c'è il fatto che i genitori siano consanguinei.

Alcune di queste persone hanno una capacità visiva estremamente ridotta, soprattutto da lontano. Inoltre, poiché la loro visione è mediata dai bastoncelli, responsabili della visione notturna, spesso presentano una marcata fotofobia.



Figura 2.4: Ancora l'immagine di una bancarella, questa volta vista da un acromate, assenza di due fotopigmenti.

Capitolo 3

Differenza topologiche fra gli spazi dei colori nelle varie forme di daltonismo

3.1 Spazi quoziente

Gli spazi quoziente si costruiscono a partire da altri spazi topologici mediante relazioni di equivalenza.

Definizione 3.1. Sia X uno spazio topologico, Y un insieme e $p : X \rightarrow Y$ un'applicazione suriettiva. La topologia quoziente su Y rispetto a p è:

$$\tau_p = \{U \subset Y \mid p^{-1}(U) \subset X, \text{ aperto in } X\}$$

Se p è suriettiva da X a Y spazi topologici, essa si dice **identificazione** se Y ha topologia quoziente rispetto a p .

Definizione 3.2. Sia $f : S \rightarrow T$, con S, T insiemi e sia $A \subset S$ un sottoinsieme qualsiasi del dominio. A si dice **saturo** se $A = f^{-1}(f(A))$.

Da queste definizioni discende il

Lemma 3.1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $p : X \rightarrow Y$*

continua e suriettiva sia un'identificazione è che $p(A)$ sia aperto in Y per ogni aperto saturo A di X .

Proposizione 3.1.2. *La composizione di identificazioni è ancora un'identificazione.*

Proposizione 3.1.3. *Sia $p : X \rightarrow Y$ continua e suriettiva. Se p è aperta oppure chiusa allora è un'identificazione.*

Per cercare di chiarire meglio questi concetti, di seguito sono riportati un paio di esempi.

3.2 Esempi

La circonferenza

È possibile definire una circonferenza a partire dall'intervallo $I = [0, 1]$, inserendo la relazione di equivalenza \sim tale per cui

$$a \sim b \iff a = b \vee (a = 0 \wedge b = 1) \vee (a = 1 \wedge b = 0)$$

Identificando i punti dell'intervallo (cioè usando come identificazione la proiezione canonica) secondo questa relazione si ottiene uno spazio in cui ciascun punto del dominio è equivalente a se stesso, tranne gli estremi dell'intervallo che appartengono alla stessa classe di equivalenza.

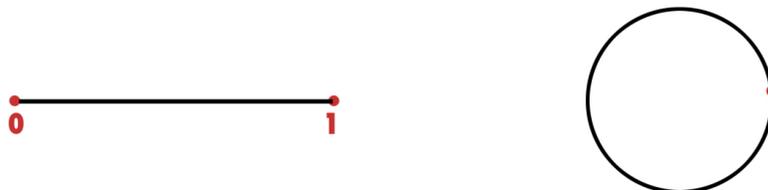


Figura 3.1: A sinistra il segmento $[0, 1]$, con gli estremi evidenziati in rosso. A destra lo stesso segmento con gli estremi identificati, cioè una circonferenza.

Si può ottenere lo stesso risultato mediante un'applicazione continua e suriettiva:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow S^1 \\ a &\mapsto e^{i\pi a} \end{aligned}$$

che è un'identificazione.

Il toro

Un ulteriore esempio di topologia quoziente è costituito dal toro T^2 che si può ottenere mediante opportune identificazioni dei lati opposti di un quadrato $I \times I$, con $I = [0, 1]$.

Si introduce la seguente relazione di equivalenza \sim così definita:

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (c, d) &\Leftrightarrow a = c \wedge b = d, \quad a, b, c, d \notin \{0, 1\} \\ (0, b) \sim (1, d) &\Leftrightarrow b = d \end{aligned}$$

$$(a, 0) \sim (c, 1) \Leftrightarrow a = c$$

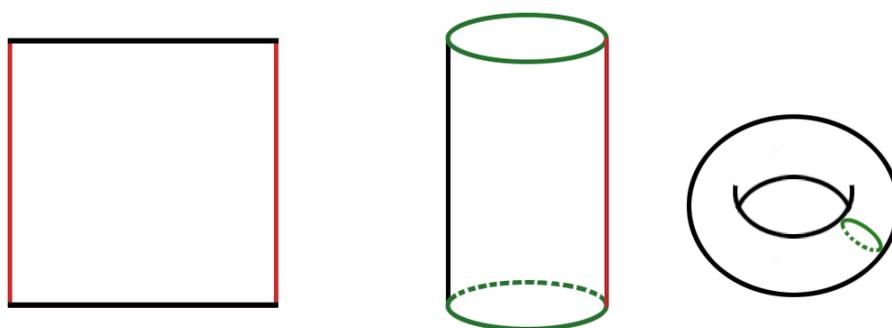


Figura 3.2: A sinistra il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. In rosso sono segnati i lati che vengono identificati per diventare (al centro) un cilindro. In quest'ultimo sono segnate in verde le circonferenze che vengono identificate a destra per ottenere il toro.

In questo modo si ottiene l'identificazione dei quattro lati del quadrato, mentre i punti interni sono equivalenti solo a se stessi.

Anche in questo caso si può scrivere esplicitamente un'applicazione continua e suriettiva che permetta di ottenere il medesimo risultato.

Poiché T^2 è omeomorfo a $S^1 \times S^1$, la funzione richiesta sarà:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow S^1 \times S^1 \\ (a, b) &\mapsto (e^{i\pi a}, e^{i\pi b}) \end{aligned}$$

È anch'essa un'identificazione.

3.3 Lo spazio dei colori e le linee di confusione

Si possono classificare i colori in base a tre caratteristiche:

- la **luminosità**, che è legata alla capacità da parte di un oggetto di riflettere o meno la luce;
- la **saturatione**, che è legata alla quantità di bianco, nero o grigio presente nel colore in esame;
- la **tinta**, che si riferisce all'aspetto vero e proprio del colore stesso.

Sulla base di queste tre caratteristiche è possibile disporre i colori percepiti dall'occhio umano su un cilindro solido al centro del quale si trovano i colori desaturati, ovvero i grigi, disposti in base alla loro luminosità, partendo dal basso, con il nero a luminosità 0, fino ad arrivare al bianco che ha luminosità 100.

Ad ogni livello di luminosità si trova un cerchio con tutti i colori a saturazione massima sul bordo. Man mano che ci si sposta dal bordo verso il centro, dove si trovano i grigi, la saturazione del colore diminuisce.

3. Differenza topologiche fra gli spazi dei colori nelle varie forme di
16 daltonismo

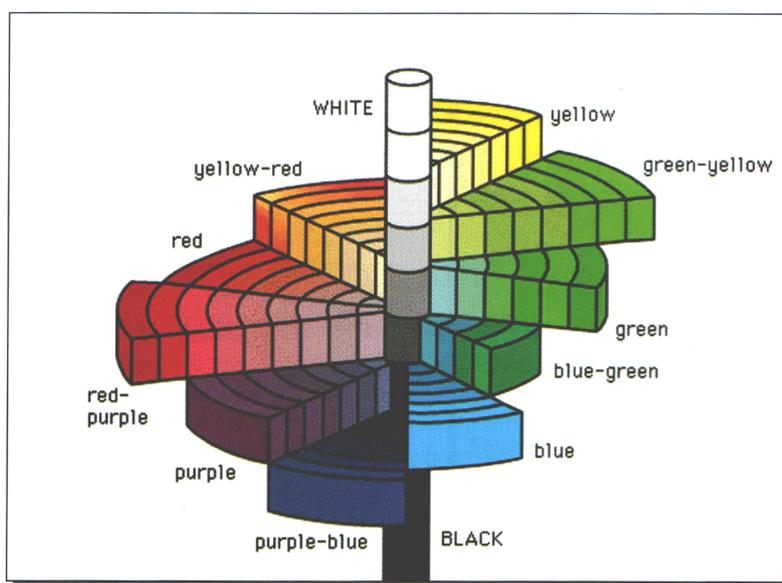


Figura 3.3: Disposizione dei colori nel sistema di Munsel: al centro si vede la scala di grigi, intorno sono disposti i colori. Quelli più saturi si trovano all'esterno. [4]

Scelta una luminosità, il solido rappresentato nella precedente figura viene sezionato con un piano e si ottiene una figura convessa, simile ad un ferro di cavallo chiuso, sulla quale sono rappresentati tutti i colori visibili a quella luminosità.

Al centro è rappresentato il grigio corrispondente, mentre, spostandosi verso il bordo, si vedono i colori a saturazione via via maggiore. All'esterno sono indicate le lunghezze d'onda corrispondenti.

La linea che congiunge gli estremi, ovvero 380 nm e 700 nm, è detta linea dei porpora non spettrali. Su di essa, infatti, sono collocati tutti quei colori che vengono percepiti quando si combinano fra loro le lunghezze d'onda dei rossi e dei violetti.

Se, invece, si collegano fra loro due lunghezze d'onda qualsiasi, si trovano tutti i colori che si ottengono mescolando fra loro quantità diverse delle stesse.

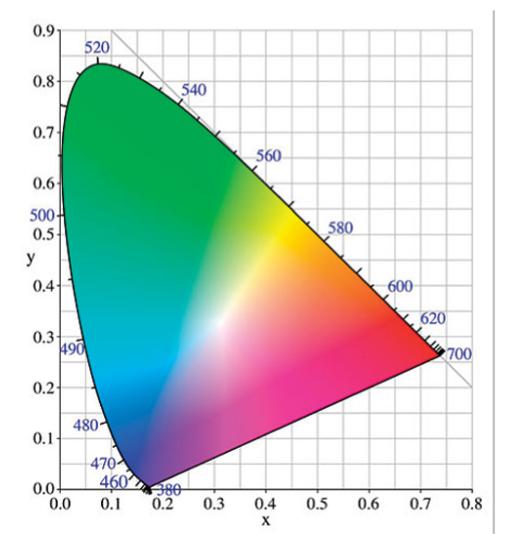


Figura 3.4: In questa immagine è rappresentato il grafico bidimensionale dei colori.

Normalmente, un essere umano può distinguere colori che differiscono di appena un nanometro nella regione spettrale che contiene i blu-verdi e i gialli, mentre per le regioni più estreme, si percepisce una differenza di tonalità con una differenza di lunghezza d'onda maggiore di quattro nanometri.

3.4 Caso monodimensionale

Si considerino ora solo i colori a saturazione massima, cioè il bordo di questa figura. Esso può essere visto come una circonferenza che contiene tutti i colori, che per un essere umano variano con continuità. Quindi, dal punto di vista topologico, questo spazio appare come la circonferenza S^1 .

Nel caso degli uccelli, che, come illustrato nel capitolo 1, possiedono quattro tipi di fotorecettore, il bordo dello spazio dei colori sarà la sfera bidimensionale S^2 .

Nel caso di un daltonico, invece, data l'assenza di un tipo di fotorecettore, si consideri un punto esterno allo spazio dei colori chiamato "*punto copuntuale*". Questo punto ha coordinate ben precise. Esse sono:

- $x = 0.7635$ $y = 0.2365$ per i protanopi;
- $x = 1.400$ $y = -0.400$ per i deuteranopi;
- $x = 0.1748$ $y = 0.00$ per i tritanopi.

Da esso partono delle rette che intersecano lo spazio stesso. Esse sono dette "*linee di confusione*" o "*linee isocromatiche*" e lungo di esse non vengono percepite differenze cromatiche.

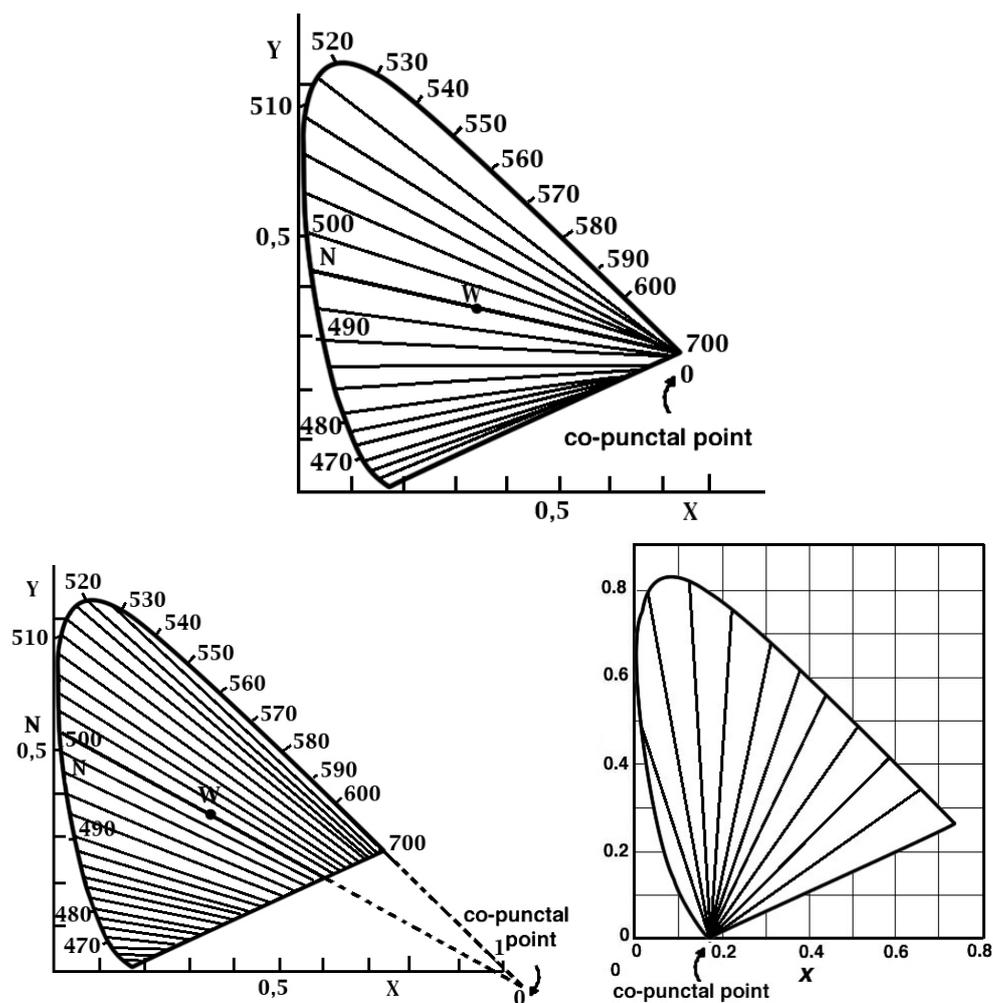


Figura 3.5: In alto, il grafico delle linee di confusione per i protanopi, in basso a sinistra, quello delle linee di confusione per i deuteranopi, in basso a destra quello per i tritanopi. [7]

Tornando ad analizzare il modello del bordo, si aggiunge un punto P esterno alla circonferenza e si conducono delle rette da esso ad S^1 .

Si introduca la relazione di equivalenza \sim per cui

$$a \sim b \Leftrightarrow a, b \in r \tag{3.1}$$

con $a, b \in S^1$ e r una generica retta passante per il punto P .

Mediante questa relazione, i punti della circonferenza vengono identificati a due a due, tranne quelli in cui le rette sono tangenti. In questo modo si ottiene un segmento detto I .

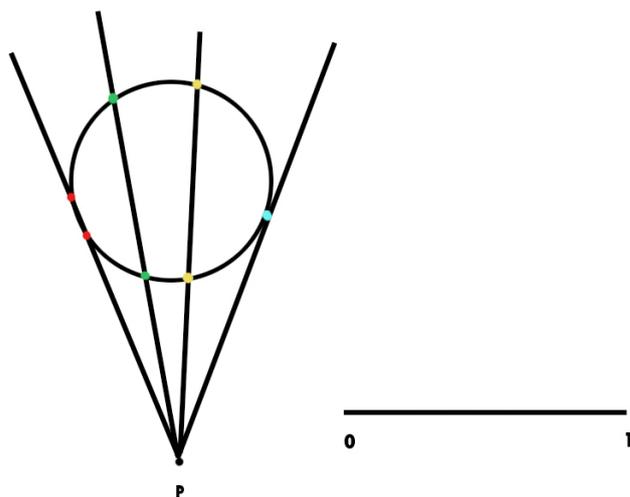


Figura 3.6: A sinistra il punto P da cui partono le rette che intersecano la circonferenza. I punti di intersezione fra rette e circonferenza sono evidenziati con lo stesso colore se appartengono alla stessa retta. A destra il segmento I , ottenuto con la relazione di equivalenza *sim*.

Topologicamente parlando, protanopi, deuteranopi e tritanopi sono analoghi, mentre da un punto di vista geometrico questo non è vero.

Infatti, come illustrato prima, i “*punti copuntuali*” sono situati a coordinate differenti e a distanza diversa dallo spazio dei colori nei tre casi, quindi il modello qui proposto non conserva la metrica.

A questo punto si considerino gli acromati. Ad essi manca un ulteriore tipo di fotorecettore, quindi si introduca la relazione \sim_1 a partire dalla \sim .

$$a \sim_1 b \Leftrightarrow a, b \in I \tag{3.2}$$

e quindi il tutto viene ridotto a un punto.



Figura 3.7: A sinistra il segmento I , a destra il punto P , ottenuto mediante l'identificazione \sim_1 .

Infatti queste persone percepiscono solo le variazioni di luminosità e non di colore.

3.5 Caso bidimensionale

Se si considerano ora anche i colori a saturazione via via decrescente, si ottiene, per quanto riguarda un normovedente, un disco pieno.

Nei diversi casi di daltonismo, invece, si consideri nuovamente il punto P esterno al disco, e le rette che passano per esso e che lo intersecano, come in 3.4

Si introduca la relazione \sim_2 , tale per cui:

$$a \sim b \iff a, b \in r \tag{3.3}$$

In questo caso, però, essendo il disco pieno, non verranno identificati solo due punti, ma un intero segmento, nel caso di rette secanti, un punto in caso di rette tangenti e il risultato sarà comunque un segmento.

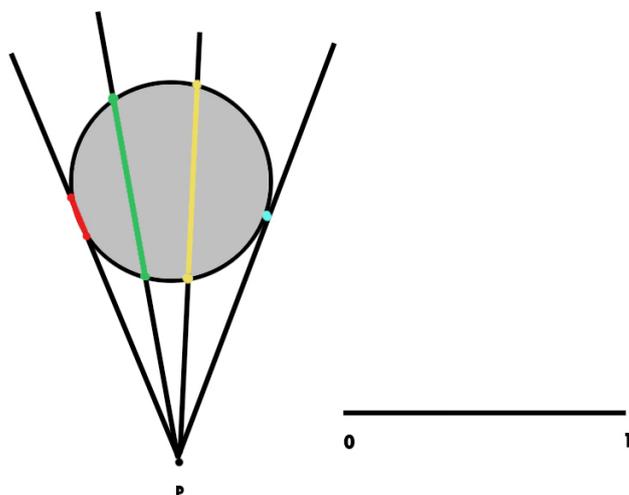


Figura 3.8: A sinistra il punto P da cui partono le rette che intersecano il disco. I segmenti evidenziati con lo stesso colore poichè appartengono alla stessa retta, rappresentano le classi di equivalenza. A destra il segmento I , ottenuto con la relazione di equivalenza sim_2 .

Queste tre figure, segmento, circonferenza e disco non sono fra loro omeomorfe. Tuttavia, nonostante le dimensioni diverse, disco e segmento sono omotopicamente equivalenti.

Viceversa, anche se della stessa dimensione, segmento e circonferenza non sono nemmeno omotopicamente equivalenti, ma dalla seconda si passa al primo mediante la relazione 3.1

Conclusioni

In questa tesi, con gli strumenti dell'omeomorfismo e dell'equivalenza omotopica, si sono rilevate le sostanziali differenze fra i modi in cui gli uomini normovedenti e i diversi tipi di daltonici percepiscono i colori.

È possibile che una tale analisi possa facilitare la progettazione di sistemi d'ausilio per daltonici.

Bibliografia

- [1] <http://www.colblindor.com/2007/01/23/confusion-lines-of-the-cie-1931-color-space/>
- [2] Goldsmith T. H., *What birds see*, Scientific American, 2006, pp. 68-75.
- [3] Matveev S. V., *Lectures on Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2006.
- [4] McIntyre D., *Color blindness, causes and effects*, Dalton Publishing, 2002
- [5] Pokorny J., Smith V.C., Verriest G., Pinckers A.J.L.G., *Congenital and acquired color vision defects*, New York, Grune & stratton, 1979.
- [6] Sernesi E., *Geometria 2*, Torino, Bollati Boringhieri, 2001
- [7] <http://www.colblindor.com/2007/01/23/confusion-lines-of-the-cie-1931-color-space/>
- [8] Zingarian M., Gandolfo E., *Ipovisione, nuova frontiera dell'Oftalmologia*, Roma, Edizioni SOI, 2002

Elenco delle figure

1.1	In questo disegno sono rappresentate le curve di sensibilità di tutti i fotorecettori presenti negli uccelli, con e senza l'interazione delle vescicole oleose. [2]	3
2.1	Nell'immagine sono rappresentati i picchi di sensibilità dei tre fotorecettori. Come si può notare, per percepire le lunghezze d'onda della maggior parte dello spettro sono necessari due fotopigmenti. [7]	6
2.2	A sinistra, l'immagine di una bancarella. Al centro la stessa immagine vista da un protanopo, assenza dei fotorecettori per il rosso, a destra vista da una deuteranopo, assenza dei fotorecettori per il verde. [4]	8
2.3	La stessa immagine di prima, questa volta vista da un tritanopo, assenza di recettore per il blu. [4]	8
2.4	Ancora l'immagine di una bancarella, questa volta vista da un acromate, assenza di due fotopigmenti.	10
3.1	A sinistra il segmento $[0, 1]$, con gli estremi evidenziati in rosso. A destra lo stesso segmento con gli estremi identificati, cioè una circonferenza.	13
3.2	A sinistra il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. In rosso sono segnati i lati che vengono identificati per diventare (al centro) un cilindro. In quest'ultimo sono segnate in verde le circonferenze che vengono identificate a destra per ottenere il toro.	14

3.3	Disposizione dei colori nel sistema di Munsel: al centro si vede la scala di grigi, intorno sono disposti i colori. Quelli più saturi si trovano all'esterno. [4]	16
3.4	In questa immagine è rappresentato il grafico bidimensionale dei colori.	17
3.5	In alto, il grafico delle linee di confusione per i protanopi, in basso a sinistra, quello delle linee di confusione per i deuteronopi, in basso a destra quello per i tritanopi. [7]	19
3.6	A sinistra il punto P da cui partono le rette che intersecano la circonferenza. I punti di intersezione fra rette e circonferenza sono evidenziati con lo stesso colore se appartengono alla stessa retta. A destra il segmento I , ottenuto con la relazione di equivalenza sim	20
3.7	A sinistra il segmento I , a destra il punto P , ottenuto mediante l'identificazione \sim_1	21
3.8	A sinistra il punto P da cui partono le rette che intersecano il disco. I segmenti evidenziati con lo stesso colore poichè appartengono alla stessa retta, rappresentano le classi di equivalenza. A destra il segmento I , ottenuto con la relazione di equivalenza sim_2	23

Ringraziamenti

Eccomi qua, pronta per ringraziare tutte le persone che mi sono state vicine in questi anni difficili, sperando di non dimenticare nessuno, e, ovviamente, nojn è detto che vada in ordine di importanza!

Il primo grazie (e questo davvero per importanza) va a mia sorella Cecilia, con le sue solite simpatiche frasi del tipo “Ma non ti laurei mai?!”. Questo viaggio è iniziato con te e papà, quando nel 2004 ho messo per la prima volta piede in questo dipartimento insieme a voi ed ho visto le aule. Da allora mi sei sempre stata vicina, fra litigate e riappacificazioni. Ed ora è finito, o almeno è giunto ad una prima tappa.

A Cecilia, Sara e Gabriele per avermi sopportata e per essermi sempre stati vicini, perché gli amici veri sono quello che davvero conta nella vita, e me lo hanno dimostrato.

A Cristiana e Michele e agli altri scout per i bei momenti condivisi insieme, per esserci stati quando ero triste ed avermi ridonato un sorriso, condito con qualche pugno sulle spalle.

A Cristina, Elena, Giacomo, Matteo, Filippo, Francesca, Ivan, Yannick per tutti i bei momenti passati insieme, anche se ogni tanto erano un po' angoscianti, perché la matematica è bella, ma c'è anche altro nella vita!

A questo proposito: un grosso grazie a tutte le ragazze del mio corso di canto, e anche a Paolo, ovviamente, perché la musica è quello che veramente ci tiene vivi.

Un grazie a Chiara, Chiara, Chiara, Lucia, Lucia (non è uno scherzo!) Fabrizia, Mirco, Patrizia, Alessandra e a tutti quelli con cui ho condiviso un

po' dell'angoscia pre-esami e un po' di ore di studio. Collaborare con voi è stato stupendo! E grazie anche per gli appunti! (Non solo a voi).

Ringrazio i professori che mi hanno aiutata in questi anni, con le loro spiegazioni comprensibili e con quei piccoli accorgimenti, come per esempio le fotocopie ingrandite, che sono davvero state molto utili per la mia preparazione.

Un grazie particolare al mio relatore Massimo Ferri, per avermi suggerito questo argomento di tesi che mi ha molto interessata e divertita.

Grazie alla correlatrice, Carla Molinotti, che mi ha fornito materiale prezioso per le mie ricerche.

Grazie a Claudia, Francesca, Mariana, Valeria, Chiara, Ramona, Beatrice per le lunghe chiacchierate.

Grazie ad Antonietta, per il te e le torte del sabato pomeriggio, per aver sopportato la mia sbadataggine dovuta anche ai pensieri per l'università. Insieme a lei ringrazio quelle pesti dei miei ragazzi di catechismo, con cui ho condiviso questi ultimi quattro anni.

Grazie anche a Don Carlo e agli animatori del campo scuola e alle fantastiche serate passate insieme a fare baldoria!

Grazie ai nonni, senza motivazione, per tutto, perché "la Cleta" e "Marangoni" sono i miei secondi genitori, a loro devo molto, da sempre.

Grazie anche agli altri nonni e agli zii, dato che il primo anno di università mi hanno ospitata durante le vacanze di natale e quelle estive per poter preparare gli esami senza distrazioni (a parte i libri nascosti sotto il letto... che ovviamente leggevo in continuazione!).

Infine, grazie alla mia mamma, per tutto, per non avermi lasciato abbandonare quando lo folovo fare, e anche per le figure incluse in questa tesi.

Credo di avere finito, ancora scusa a chi ho dimenticato.