

Tesi

Alessandro Morelli

27 gennaio 2008

Introduzione

Il gruppo fondamentale fornisce informazioni generali sulla “forma” di uno spazio topologico, dunque si presta ad essere utilizzato in ambito applicativo per il *ricoscimento di forme*. D'altra parte esso è carente di informazioni metriche, dunque si rivela poco efficace allo scopo.

In questa tesi si tenta di aprire la strada verso la creazione di un oggetto algebrico simile al gruppo fondamentale, ma molto più performante nel riconoscimento di forme, definito per sottovarietà topologiche di \mathbb{R}^n , con la distanza euclidea.

Nel capitolo introduttivo 1, dopo una parte “divulgativa” che spiega come sia nata l'idea (1.1), vengono chiarite le ipotesi di lavoro: sottovarietà topologiche di \mathbb{R}^n connesse, compatte e abbastanza “regolari”, su cui si considerano cammini *di lunghezza finita* (1.2).

Il capitolo 2 introduce la struttura algebrica fondamentale su cui poggia il resto della trattazione. In 2.1 si definisce una relazione di (pre)ordine sui cammini, utilizzando omotopie “restringenti”, cioè omotopie che trasformano un cammino senza mai aumentarne la lunghezza. In 2.2 viene introdotta la nozione di *traccia*, utilizzando la relazione di equivalenza per riparametrizzazione definita sui cammini. Tale relazione offre la possibilità di definire un monoide (preordinato) $\mu(X, x_0)$ sull'insieme dei cappi con punto base fisso (2.3).

In 3.1 viene accennata la possibilità di definire un gruppo sulle tracce minimali di $\mu(X, x_0)$. Il discorso porta ad indagare le proprietà delle catene discendenti di tracce, in particolare l'esistenza di un limite e di un'omotopia restringente tra gli elementi della catena e il suo limite (3.2). Rimane aperta una congettura, che viene discussa in 3.3, dove si indicano alcune strade che potrebbero portare ad una dimostrazione.

In (4.1) vengono proposti due possibili inquadramenti teorici degli argomenti trattati in precedenza: uno nella teoria delle categorie, l'altro nella topologia algebrica diretta. Infine in 4.2 si discutono l'esistenza e le caratteristiche dei cappi minimali di un ellissoide e di un cubo.

Indice

1	Premesse	5
1.1	Un fil di lana è migliore di un elastico?	5
1.2	Prima di cominciare	6
2	Una variante del gruppo fondamentale	11
2.1	Cammini preordinati	11
2.2	Dal cammino alla traccia	13
2.3	Un monoide preordinato	18
3	Proprietà (vere e . . . presunte)	21
3.1	Ritrovare un gruppo	21
3.2	Catene di tracce	22
3.2.1	Controesempi	23
3.2.2	Risultati generali	29
3.3	Storia di una congettura	35
4	Epilogo	45
4.1	Punti di vista	45
4.2	Esperimenti	49
A	Appendice	55

Capitolo 1

Premesse

1.1 Un fil di lana è migliore di un elastico?

Il gruppo fondamentale è un oggetto matematico che traduce informazioni riguardanti la forma di uno spazio topologico in linguaggio *algebrico*. Visto che la superficie di un oggetto si può sempre considerare una sottovarietà (topologica) di \mathbb{R}^3 , e quindi uno spazio topologico, diventa naturale pensare di poter utilizzare il gruppo fondamentale (o una sua variante) in ambito applicativo, per il riconoscimento e il confronto di forme. I vantaggi sarebbero due: in primo luogo, assegnare alle diverse forme le strutture algebriche corrispondenti (con le loro caratteristiche peculiari) costituirebbe già, di per sé, una prima classificazione; inoltre confrontare due strutture algebriche sarebbe molto più facile e veloce che confrontare due insiemi di punti nello spazio.

Le proprietà funtoriali del gruppo fondamentale garantiscono che due spazi topologici non sono omeomorfi, se hanno gruppi fondamentali diversi. D'altra parte non è detto che due spazi aventi lo stesso gruppo fondamentale siano omeomorfi. Infatti il gruppo fondamentale “confonde” non solo spazi topologici omeomorfi, ma tutti gli spazi omotopicamente equivalenti tra loro. Per esempio, hanno lo stesso gruppo fondamentale due spazi dei quali uno possa essere *retrato per deformazione* sull'altro (come una corona circolare su una circonferenza), come pure tutti gli spazi *contraibili* (il punto, lo spazio, la sfera “piena”, ecc.). Il gruppo fondamentale, dunque, pur essendo uno strumento formidabile per la dimostrazione di diversi e importanti teoremi, si rivela inefficiente allo scopo di distinguere forme che per il nostro intuito sono ben diverse. Da tale considerazione è nata l'idea di modificare questo strumento algebrico per renderlo capace, per esempio, di distinguere una sfera da un pupazzo di neve, una ciambella da un bullone. Per far ciò è necessario

che esso riesca, in qualche modo, a distinguere le zone di strozzatura, i lobi, le irregolarità che la superficie di un oggetto presenta.

Il concetto di omotopia e, poi, quello di gruppo fondamentale nascono dalla formalizzazione di un'idea intuitiva, quella di raggruppare insieme tutti i cammini che possano essere deformati gli uni negli altri in modo continuo, come degli elastici, senza “fuoriuscire” dallo spazio topologico in cui si trovano. Il presente lavoro modifica quella felice idea originaria decidendo di non permettere a un cammino di allungarsi, ma soltanto di deformarsi restringendosi o mantenendo la sua lunghezza. Intuitivamente non si fa altro che sostituire all'elastico un filo di lana “ideale” (che possa, cioè, restringersi fino a diventare un punto). È chiaro come, in questo modo, un cappio stretto attorno al collo del pupazzo di neve, non potendo essere ulteriormente ristretto, non potrà più essere “raggruppato” insieme al cammino nullo (figura 1.1): sarà così possibile distinguere il pupazzo di neve dalla sfera.

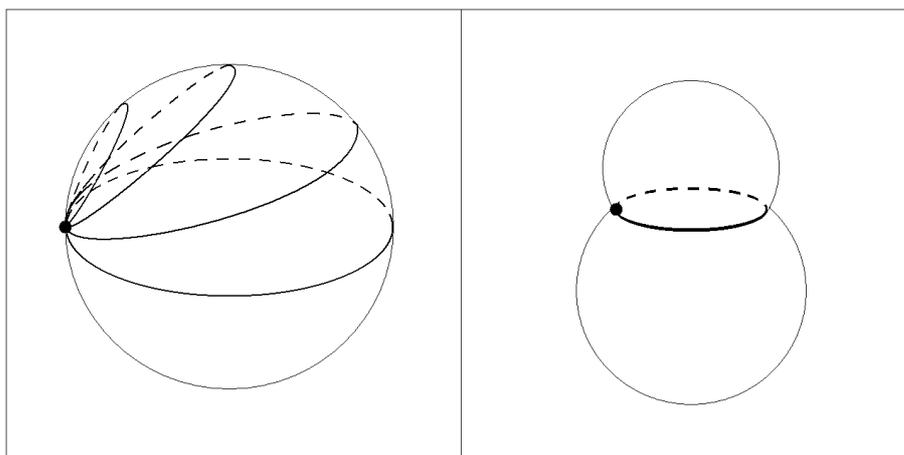


Figura 1.1: La sfera ed il pupazzo di neve.

1.2 Prima di cominciare

Le definizioni di “cammino”, “cappio” (o “laccio”), “omotopia” (si vedano [1], [2], [3]) e “relazione d'ordine” si suppongono già note al lettore, mentre viene presentata esplicitamente una definizione di “preordine” e di “ordine stretto”.

Definizione. Dato un insieme Y , una relazione di “preordine” ([4], pag.11) su Y è una relazione binaria che gode delle proprietà riflessiva e transitiva.

Se $\forall x, y \in Y, (xRy) \vee (yRx)$, si parla di preordine “totale”.

Spesso, per evidenziare il fatto che un preordine non è totale, si parla di preordine “parziale”.

Un insieme su cui sia stata definita una relazione di preordine si dice “insieme (totalmente/parzialmente) preordinato”.

Osservazione. Dato un insieme preordinato, è possibile definire, a partire da questo, un insieme ordinato. Basta definire la relazione E dicendo che xEy se e solo se $(xRy) \wedge (yRx)$. Si dimostra immediatamente che E è una relazione d’equivalenza. In questo modo la relazione R , (ben) definita sull’insieme quoziente, diventa una relazione d’ordine.

Nota. Si precisa il significato di alcuni termini che saranno usati in seguito, dal momento che, in letteratura, capita che ad essi vengano attribuiti significati diversi.

Dato un insieme Y e una relazione binaria R su Y , si dirà che R è:

- “irriflessiva” se $\forall x \in Y, \neg(xRx)$;
- “antisimmetrica” se $\forall x, y \in Y, (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow (x = y)$;
- “asimmetrica” se $\forall x, y \in Y, (xRy) \Rightarrow \neg(yRx)$.

Definizione. Una relazione di “ordine stretto” è una relazione irriflessiva, asimmetrica e transitiva.

Osservazione. Per una relazione di ordine stretto la proprietà di essere asimmetrica è una conseguenza logica immediata delle altre due proprietà.

Nota. Lo spazio topologico che fa da codominio ai cammini sarà denotato con “ X ” e sarà, per la precisione, una sottovarietà topologica di \mathbb{R}^n , connessa, compatta. Inoltre X , considerato come parametrizzazione avente immagine in \mathbb{R}^n , si supporrà \mathcal{C}^2 quasi ovunque, e così anche la parametrizzazione dell’insieme su cui X non è \mathcal{C}^2 .

Tali richieste non sono così bizzarre quanto appaiono, infatti l’obiettivo finale è poter lavorare su poliedri utilizzando la derivazione usuale in \mathbb{R}^n . Con queste ipotesi anche cammini che corrono lungo gli spigoli saranno \mathcal{C}^2 quasi ovunque.

Osservazione. Essendo una sottovarietà topologica di \mathbb{R}^n , X è localmente connesso per archi, il che, unitamente al fatto che X è connesso, implica che X è connesso per archi. Con le ipotesi fatte, dunque, si evitano casi “patologici” come il bruco-mela (figura 1.2) in \mathbb{R}^3 .

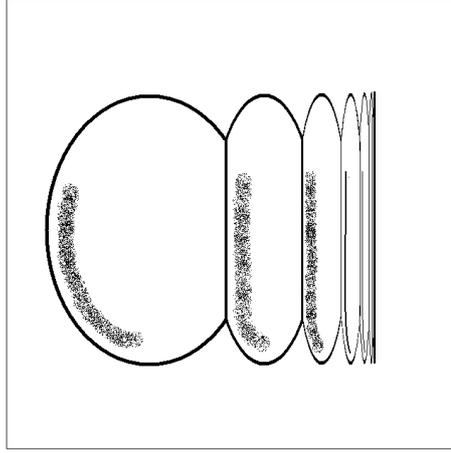


Figura 1.2: Il bruco-mela.

Definizione. Si rappresenti una generica partizione finita p dell'intervallo $[a, b]$ con la k -pla ordinata $\sigma(p) = (t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k = b)$ (sottintendendo $t_0 = a$). Indicando con Q l'insieme di tutte le partizioni finite di $[0, 1]$, per ogni funzione f definita su $[a, b]$ a valori in uno spazio normato Y , la “variazione totale” di f su $[a, b]$ si definisce in questo modo:

$$\mathcal{V}_a^b(f) = \sup_{p \in Q} \sum_{\sigma(p)} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|_Y.$$

L'insieme delle funzioni definite su $[a, b]$ a valori in Y che hanno variazione finita si denota con $BV([a, b], Y)$ (*bounded variation*).

Nota. Su X saranno presi in considerazione soltanto cammini appartenenti a $BV([0, 1], \mathbb{R}^n)$, con la norma euclidea. In questo modo avrà senso parlare di *lunghezza* di un cammino, in quanto essa coinciderà con la sua variazione totale. Il suo valore sarà indicato con $L(f)$. La funzione lunghezza d'arco di f , invece, si indicherà con il simbolo \mathcal{L} .

Definizione. In questo contesto un cammino f si dirà “parametrizzato in lunghezza d'arco” quando, per ogni $t \in [0, 1]$, $\mathcal{L}(t) = tL(f)$.

Osservazione. Secondo la definizione, ogni cammino costante è parametrizzato in lunghezza d'arco.

Nota. L'operazione di prodotto tra cammini (detto anche "concatenazione") sarà denotata con il simbolo "*".

Per finire, alcune notazioni:

- I rappresenterà l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$;
- \mathbb{N}^* l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- ∂A rappresenterà la frontiera dell'insieme A .

Capitolo 2

Una variante del gruppo fondamentale

In questo capitolo verranno formalizzati i concetti e le operazioni, intuitivi ma vaghi, introdotti in 1.1 (come “filo di lana” e “raggruppare”), fino alla definizione di un oggetto algebrico simile al gruppo fondamentale. Tale oggetto sarà il punto di partenza per tutta la teoria successiva.

2.1 Cammini preordinati

La seguente definizione formalizza l’idea del filo di lana:

Definizione. Si dirà che un cammino f è un “restringimento” di un cammino g , e si scriverà “ $f \preceq g$ ”, quando esiste un’omotopia H tra f e g tale che

$$\begin{aligned}H|_{I \times \{0\}} &= f, \\H|_{I \times \{1\}} &= g, \\H|_{\{0\} \times I} &\equiv f(0) = g(0), \\H|_{\{1\} \times I} &\equiv f(1) = g(1),\end{aligned}$$

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1], \quad x_1 < x_2 \Rightarrow L(H|_{I \times \{x_1\}}) \leq L(H|_{I \times \{x_2\}}).$$

Tale omotopia sarà detta “omotopia che restringe g su f ”.

Proposizione. *La relazione tra cammini “essere un restringimento di” è una relazione di preordine.*

Dimostrazione. Immediata. \square

Definizione. Un cammino m sarà detto “minimale” se, dato un qualsiasi cammino f , m ed f non sono confrontabili oppure $m \preceq f$.

Definizione. Dati due cammini f e g , si dirà che f è “L-omotopo” a g se esiste un’omotopia H che restringe g su f tale che

$$\forall x \in [0, 1], \quad L(H|_{I \times \{x\}}) = L(f) = L(g).$$

Tale omotopia sarà detta “L-omotopia” tra f e g .

Osservazione. Si osserva immediatamente che due cammini f e g sono L-omotopi se e solo se $f \preceq g$ e $g \preceq f$. In tal caso si scriverà “ $f \stackrel{L}{\approx} g$ ”.

Proposizione. *La relazione tra cammini “essere L-omotopo a” è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Ovvio, per l’osservazione sugli insiemi preordinati. \square

Corollario. *L’insieme delle classi di L-omotopia di cammini su uno spazio topologico, con la relazione “essere un restringimento di”, costituisce un insieme ordinato.*

Osservazione. In generale tale insieme ordinato non dà luogo ad un reticolo: l’insieme formato da due classi di L-omotopia relative a due cammini non omotopi non ha nè un sup nè un inf.

Definizione. Si dirà che il cammino f è “un restringimento proprio” del cammino g (“ $f \prec g$ ”), quando $f \preceq g$ e $\mathcal{L}(f) < \mathcal{L}(g)$.

Proposizione. *La relazione tra cammini “essere un restringimento proprio di” è una relazione di ordine stretto.*

Dimostrazione La proprietà irreflessiva è ovvia. La proprietà transitiva deriva dal fatto che, dati due cammini f e g , $f \prec g \Rightarrow f \preceq g$. \square

2.2 Dal cammino alla traccia

Da questo punto in poi, dunque, non si parlerà semplicemente di omotopie, ma di omotopie *restringenti*. L'omotopia dava luogo ad una relazione di equivalenza tra cammini e permetteva di definire il gruppo fondamentale a partire dall'insieme delle classi di equivalenza dei cappelletti costruiti su un punto fissato. È lecito chiedersi, pertanto, che tipo di struttura algebrica si possa definire sull'insieme preordinato dei cappelletti aventi come base un punto fissato. Si scopre subito che

Proposizione. *L'operazione di concatenazione “*”, definita sui cammini invece che sulle classi di omotopia di cammini, non è, in generale, associativa.*

Dimostrazione. Dato un generico spazio topologico Y , si considerino tre cammini su Y , f , g e h , tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Allora

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t), & t \in [0, 1/4] \\ g(4(t - 1/4)), & t \in [1/4, 1/2] \\ h(2(t - 1/2)), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, 1/2] \\ g(4(t - 1/2)), & t \in [1/2, 3/4] \\ h(4(t - 3/4)), & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

che sono evidentemente due cammini diversi, a meno di casi particolari. \square

È evidente, d'altronde, che i due cammini della dimostrazione precedente, $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$, non sono altro che due diverse parametrizzazioni di uno *stesso percorso*. Quindi è ragionevole, da un lato, definire questo tipo di relazione tra cammini, dall'altro pensare che l'operazione “*” sarebbe associativa, se si ragionasse in termini di cammini a meno di riparametrizzazioni. In un primo momento si era pensato a questa definizione:

Definizione. Due cammini non costanti f e g saranno detti “L-coincidenti” (e si scriverà “ $f \equiv g$ ”) quando le loro riparametrizzazioni in lunghezza d'arco coincidono.

Due cammini costanti saranno detti L-coincidenti se e solo se coincidono.

In seguito, ricercando in letteratura, si è trovata ([5]) una trattazione rigorosa e approfondita della teoria delle riparametrizzazioni molto utile in questo contesto. Qui di seguito si riportano le definizioni e i risultati più utili per il presente lavoro.

Definizione (1.1, punto 4). Una “riparametrizzazione” è una funzione continua $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tale che $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ e $\forall t_0, t_1 \in [0, 1]$, $t_0 < t_1 \Rightarrow \phi(t_0) \leq \phi(t_1)$.

Definizione (1.2). Due cammini f e g sono detti “equivalenti per riparametrizzazione” se esistono due riparametrizzazioni ϕ e ψ tali che $f \circ \phi = g \circ \psi$.

Proposizione (corollario 3.2, punto 1). *L'equivalenza per riparametrizzazione è una relazione d'equivalenza.*

(par. 2.2, def. 2.5) L'insieme di tutte le riparametrizzazioni, $Rep_+(I)$, con l'usuale operazione di composizione tra funzioni, costituisce un monoide. Il suo gruppo delle unità è denominato $Homeo_+(I)$ ed è formato da tutte le riparametrizzazioni strettamente crescenti. La topologia compatto-aperto di $\mathcal{C}(I, I)$ induce su $Rep_+(I)$ una struttura di monoide topologico e su $Homeo_+(I)$ una di gruppo topologico.

Definizione (3.1). Un cammino f è detto “regolare” se è costante oppure se $f|_J$ non è costante per alcun intervallo non degenere $J \subseteq I$.

L'insieme dei cammini regolari su X è denotato con $R(X)$ ed è visto come sottospazio topologico dell'insieme di tutti i cammini su X ($P(X)$), con la topologia compatto-aperto.

Dati due punti $x, y \in X$, l'insieme dei cammini (regolari) che vanno da x a y è denotato con $P(X)(x, y)$ ($R(X)(x, y)$).

(par. 3.1) La composizione a destra dà luogo ad un'azione di gruppo di $Homeo_+(I)$ su $R(X)$ e un'azione di monoide di $Rep_+(I)$ su $P(X)$. Tali azioni rispettano la decomposizione nei sottospazi $P(X)(x, y)$ e $R(X)(x, y)$. L'azione di $Homeo_+(I)$ su $R(X)$ permette di definire gli spazi quoziente $T_R(X) = R(X)/Homeo_+(I)$ e $T_R(X)(x, y) = R(X)(x, y)/Homeo_+(I)$, l'equivalenza per riparametrizzazione dà luogo a $T(X) = P(X)/Rep_+(I)$ e $T(X)(x, y) = P(X)(x, y)/Rep_+(I)$. Gli elementi di tali spazi sono chiamati “tracce (regolari)”.

(par. 3.2) L'inclusione di $R(X)$ in $P(X)$ genera in modo naturale, per ogni coppia di punti $x, y \in X$, una funzione $i : T_R(X)(x, y) \rightarrow T(X)(x, y)$.

Teorema (3.5). *Dati $x, y \in X$, la funzione $i : T_R(X)(x, y) \rightarrow T(X)(x, y)$ è un omeomorfismo.*

(par 3.2) La conclusione è che *ogni traccia può essere rappresentata da una traccia regolare.*

Proposizione (cor. 3.2, punto 2). *Due cammini f e g equivalenti per riparametrizzazione sono "thin-omotopi", ossia esiste un'omotopia H tra f e g e due funzioni $K : I \times I \rightarrow I$ e $r : I \rightarrow I$ tali che $H = r \circ K$.*

Nella dimostrazione viene fatto osservare che, per ogni cammino f e ogni riparametrizzazione ϕ , esiste una thin-omotopia tra f e $f \circ \phi$ data da $K(t, x) = (1 - x)t + x\phi(t)$ e $r = f$.

Definizione. Prendendo in prestito la terminologia di [5], dunque, si può definire la "traccia" di un cammino f come la classe di riparametrizzazione di f , cioè l'insieme di tutti i cammini equivalenti per riparametrizzazione a f . Essa sarà indicata con $[f]_{\underline{R}}$, mentre si scriverà $f \stackrel{R}{=} g$ per indicare che due cammini f e g sono equivalenti per riparametrizzazione.

Osservazione. L'ultima proposizione citata (cor. 3.2, punto2) implica che due cammini equivalenti per riparametrizzazione sono L-omotopi. Nell'ambito della teoria dell'omotopia, due cammini si dicono "equivalenti" quando sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$ (e questa relazione è d'equivalenza), pertanto due cammini L-omotopi sono anche equivalenti. In definitiva le classi di L-omotopia dei cammini appartenenti a una stessa classe di equivalenza sono una partizione di quest'ultima, e una cosa analoga succede per le tracce di cammini appartenenti ad una stessa classe di L-omotopia.

Nell'articolo [5], per dimostrare il teorema riportato, viene dimostrata, tra l'altro, la seguente proposizione.

Proposizione (lemma 3.7). *Dato un cammino f e un cammino regolare g equivalente per riparametrizzazione a f , esiste una riparametrizzazione η tale che $f = g \circ \eta$. A meno che g non sia costante, tale η è unica.*

Definizione. Utilizzando le notazioni della proposizione di sopra, se g è un cammino non costante parametrizzato in lunghezza d'arco, g sarà detto “riparametrizzazione in lunghezza d'arco” del cammino f . Se g è costante (e quindi $f = g$), la riparametrizzazione in lunghezza d'arco di f sarà f stesso.

Si riporta ora una proposizione pensata prima di venire a conoscenza dell'articolo [5], la quale fornisce una espressione esplicita della riparametrizzazione η nel caso in cui il cammino g sia parametrizzato in lunghezza d'arco, e la dimostrazione del fatto che f e g sono thin-omotopi ed L-omotopi.

Proposizione. *Ogni cammino è L-omotopo alla sua riparametrizzazione in lunghezza d'arco.*

Dimostrazione. Si indichi con f un generico cammino su X , con $\mathcal{L}(t)$ la lunghezza d'arco di f calcolata all'istante $t \in [0, 1]$, e con L , per semplicità, il valore $\mathcal{L}(1)$, cioè la lunghezza di f . Si osservi che f è una funzione continua, ma, in generale, non iniettiva, poichè f potrebbe “stazionare” in un certo punto per qualche istante o tornare indietro sulla traiettoria già percorsa. Di \mathcal{L} si può dire che è continua, non decrescente. Nel corso della dimostrazione si farà spesso uso del fatto che $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(s) \Rightarrow f(t) = f(s)$.

L'idea è di ottenere una parametrizzazione in lunghezza d'arco “deformando” il tempo di f in modo da farlo procedere con velocità costante. A questo scopo si introduce la funzione

$$\bar{f}(t) \doteq f(\min\{a \in [0, 1] : \mathcal{L}(a) = Lt\}).$$

In questa definizione, implicitamente, è stata usata la cosiddetta “pseudoinversa” di $(1/L) \cdot \mathcal{L}$ (figura 2.1):

$$\tau(t) \doteq \min\{a \in [0, 1] : \mathcal{L}(a)/L = t\}.$$

Si può scrivere, dunque, $\bar{f} = f \circ \tau$ e dimostrare che:

1. \bar{f} è la riparametrizzazione in lunghezza d'arco di f ;
2. esiste una L-omotopia tra \bar{f} e f .

1. Il cammino \bar{f} va dal punto $f(0)$ al punto $f(1)$, infatti $f(\tau(0)) = f(0)$, $f(\tau(1)) = f(\min\{a \in [0, 1] : \mathcal{L}(a) = L\})$; ma, ponendo $\bar{a} = \tau(1)$, si ha $\mathcal{L}(\bar{a}) = \mathcal{L}(1)$, e quindi $f(\bar{a}) = f(1)$.

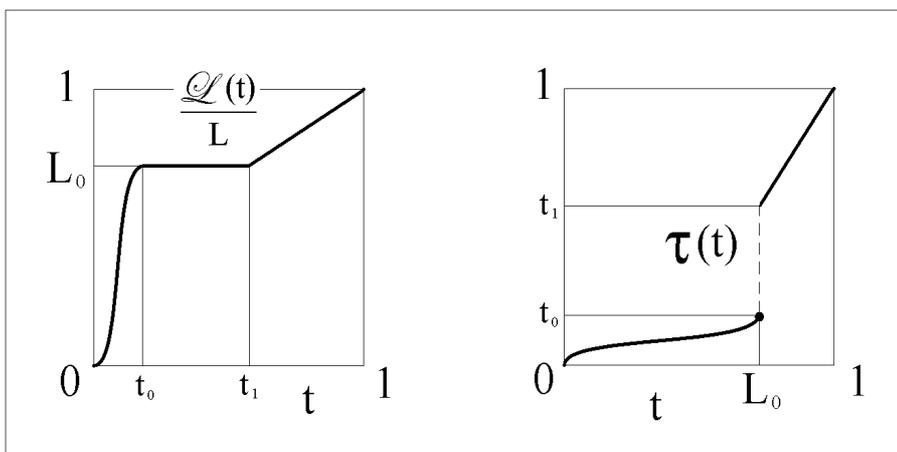


Figura 2.1: Una funzione lunghezza d'arco e la sua pseudoinversa.

La funzione τ non è, in generale, una funzione continua, mentre \bar{f} lo è, infatti, poichè f è continua

$$\forall t \in [0, 1), \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(\tau(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tau(t)\right);$$

d'altra parte, poichè anche \mathcal{L} è continua, e osservando che $(1/L) \cdot \mathcal{L} \circ \tau$ è l'identità,

$$\mathcal{L}\left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tau(t)\right) = \left[\lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathcal{L}(\tau(t)) = Lt_0 = \right] \mathcal{L}(\tau(t_0)),$$

quindi

$$f\left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tau(t)\right) = f(\tau(t_0)).$$

Ragionando analogamente per $t_0 \in (0, 1]$, con $t \rightarrow t_0^-$, si conclude la dimostrazione della continuità di \bar{f} .

Il cammino \bar{f} , dunque, va da $f(0)$ a $f(1)$ con continuità, percorrendo punti della traiettoria di f , pertanto, indicando con $\bar{\mathcal{L}}(t)$ la lunghezza d'arco percorsa da \bar{f} al tempo t ,

$$\bar{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{L}(\tau(t)) = Lt,$$

e si può concludere che \bar{f} è parametrizzato in lunghezza d'arco.

2. L'idea è di creare un'omotopia che, per ogni istante $t \in [0, 1]$, porti da $f(t)$ a $\bar{f}(t)$ percorrendo tratti della traiettoria di f . Lo scopo si ottiene con la funzione

$$H(t, x) \doteq (f \circ \tau) \left(xt + (1 - x) \frac{\mathcal{L}(t)}{L} \right)$$

che è un'omotopia *rel* $\{0, 1\}$ tra f e \bar{f} , infatti:

$$\begin{aligned} H|_{I \times \{0\}}(t) &= f(\tau(\mathcal{L}(t)/L)) = \dots = f(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ H|_{I \times \{1\}}(t) &= \bar{f}(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ H|_{\{0\} \times I}(x) &= \bar{f}(0) = f(0) \quad \forall x \in [0, 1], \\ H|_{\{1\} \times I}(x) &= \bar{f}(1) = \dots = f(1) \quad \forall x \in [0, 1]; \end{aligned}$$

inoltre H è continua perchè composizione di funzioni continue (somma, prodotto, $f \circ \tau$). Dal momento che $\mathcal{L}(H|_{\{1\} \times I}(x)) = \mathcal{L}(\tau(1)) = L$, si può concludere che H è una L -omotopia tra f e \bar{f} . \square

Ci si riporta facilmente alla situazione descritta nella proposizione citata (lemma 3.7) ponendo $\bar{f} = g$ e osservando che $(f \circ \tau)(\eta(t)) = f(t)$, con $\eta(t) = \mathcal{L}(t)/L$, $\eta \in \text{Rep}_+(I)$.

Osservazione. Per il teorema dimostrato in [5] e per quest'ultima proposizione si può dire che per ogni traccia si può scegliere come cammino rappresentante un cammino parametrizzato in lunghezza d'arco e quindi che la definizione di L -coincidenza ha senso. Si può concludere, infine, che due cammini sono equivalenti per riparametrizzazione se e solo se sono L -coincidenti.

Nota. D'ora in poi, per comodità, la riparametrizzazione in lunghezza d'arco di un cammino sarà denotata con una lineetta sovrapposta ($f \rightarrow \bar{f}$).

2.3 Un monoide preordinato

I due lemmi seguenti forniranno, finalmente, tutti gli elementi necessari per definire una struttura algebrica improntata sul gruppo fondamentale.

Lemma. *Dati tre cammini f , g e h tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$, si può affermare che $(f * g) * h \stackrel{R}{=} f * (g * h)$.*

Si danno due dimostrazioni: la prima usa la definizione di L-coincidenza, la seconda quella di equivalenza per riparametrizzazione.

Dimostrazione 1. E' facile constatare che

$$\overline{(f * g) * h}(t) = \overline{f * (g * h)}(t) = \begin{cases} \bar{f}(t/L_1), & t \in [0, L_1] \\ \bar{g}((t - L_1)/(L_2 - L_1)), & t \in [L_1, L_2] \\ \bar{h}((t - L_2)/(1 - L_2)), & t \in [L_2, 1] \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\mathcal{L}(f)}{\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) + \mathcal{L}(h)} \quad ; \\ L_2 &= \frac{\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)}{\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g) + \mathcal{L}(h)} \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Dimostrazione 2. Definendo le funzioni $r_1, r_2 \in \text{Homeo}_+(I)$,

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \begin{cases} (3/4)t, & t \in [0, 2/3] \\ (1/2) + (3/2)(t - 2/3), & t \in [2/3, 1] \end{cases} \\ r_2(t) &= \begin{cases} (3/2)t, & t \in [0, 1/3] \\ (1/2) + (3/4)(t - 1/3), & t \in [1/3, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

e il cammino p ,

$$p(t) = \begin{cases} f(3t), & t \in [0, 1/3] \\ g(3(t - 1/3)), & t \in [1/3, 2/3] \\ h(3(t - 2/3)), & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

è facile verificare che $((f * g) * h) \circ r_1 = p = f * (g * h) \circ r_2$. \square

Ponendo—per semplicità e in analogia con il gruppo fondamentale— $\mu(X, x_0) = T(X)(x_0, x_0)$, si può dire che:

Lemma. Per ogni $x_0 \in X$ l'operazione binaria “ \cdot ” : $\mu(X, x_0) \times \mu(X, x_0) \rightarrow \mu(X, x_0)$, $([f]_{\underline{R}}, [g]_{\underline{R}}) \mapsto [f]_{\underline{R}} \cdot [g]_{\underline{R}} = [f * g]_{\underline{R}}$, è ben definita.

Dimostrazione. In questo caso è più agevole usare la definizione di L-coincidenza. Se $f_0 \stackrel{R}{=} f$ e $g_0 \stackrel{R}{=} g$, allora $(f_0 * g_0) \stackrel{R}{=} (f * g)$, infatti si ha $\bar{f}_0 = \bar{f}$ e $\bar{g}_0 = \bar{g}$, quindi

$$\overline{f_0 * g_0}(t) = \overline{f * g}(t) = \begin{cases} \bar{f}(t/L), & t \in [0, L] \\ \bar{g}((t - L)/(1 - L)), & t \in [L, 1] \end{cases}$$

dove

$$L = \frac{\mathcal{L}(f)}{\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)}. \quad \square$$

Proposizione. *L'insieme $\mu(X, x_0)$ con l'operazione binaria “.” costituisce un monoide.*

Dimostrazione. Per i lemmi precedenti, “.” è ben definita ed è associativa. L'elemento neutro è costituito dalla traccia identificata dal cammino costante $\omega: [0, 1] \rightarrow X$, $\omega(t) = x_0$. \square

Nota. L'elemento neutro di $\mu(X, x_0)$ sarà chiamato “traccia nulla”, l'operazione “.” “concatenazione” (come per i cammini).

Da questo punto in poi, dunque, si parlerà di tracce e non più di cammini. Grazie alle evidenze fornite in questo paragrafo, con un leggero abuso di terminologia, tutti i termini relativi ai cammini saranno usati anche per le loro tracce, quando ciò sarà possibile: si parlerà, ad esempio, di “lunghezza” di una traccia, di omotopia tra due tracce (intendendo una qualsiasi omotopia tra un cammino della prima traccia ed uno della seconda), di traccia minimale, ecc.

Capitolo 3

Proprietà (vere e . . . presunte)

3.1 Ritrovare un gruppo

All'inizio di questo lavoro le speranze erano di riuscire a costruire un *gruppo* i cui elementi fossero le *tracce minimali* del monoide $\mu(X, x_0)$. È vero che concatenando due tracce minimali (e non) non si potrà mai ottenere la traccia nulla, tuttavia è possibile che la traccia risultante si possa restringere sulla traccia nulla. Analogamente, concatenando due tracce minimali non si ottiene, in generale, una traccia minimale, ma è possibile che essa si possa restringere su una traccia minimale scelta opportunamente (queste considerazioni hanno portato allo studio della convergenza di catene discendenti di tracce, di cui si parlerà nel paragrafo 3.2). Trovare un criterio di scelta in questo senso non è affatto facile, ammesso che esista. In primo luogo sarebbe ragionevole far sì che, dato un cammino f , il cammino $f'(t) = f(1 - t)$ dia luogo ad una traccia che sia l'inversa della traccia di f . Dati due cammini f e g , si potrebbe, per esempio, restringere $f * g$ sul cammino minimale m più breve tale che $m \preceq f * g$. Questa scelta, però, ha due difetti, di cui uno fatale: in primo luogo il cammino m potrebbe non essere unico e quindi bisognerebbe trovare un ulteriore criterio di scelta; inoltre, in certi casi, non si avrebbe affatto un gruppo, in quanto si perderebbe l'unicità dell'inverso e quindi l'associatività, come si può vedere nell'esempio seguente.

Esempio. In figura 3.1 è mostrata la superficie di un solido, X , ottenuta appoggiando una scatola su un prisma (vuoto) a base triangolare e rimuovendo la superficie di contatto. Su X è stato fissato un punto su cui sono stati costruiti due cappi, λ e γ . Se la scatola non è troppo alta, è possibile restringere la traccia data da $\lambda * \gamma$ sulla traccia nulla, come mostrato in figura 3.2. D'altro canto anche la concatenazione tra λ e $\lambda'(t) = \lambda(1 - t)$ dà

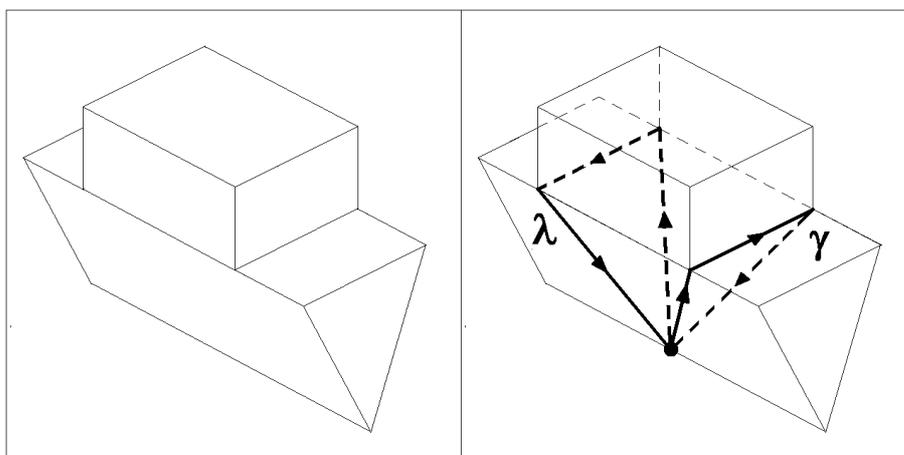


Figura 3.1: Concatenazione di due tracce minimali che dà luogo ad una traccia...

luogo ad una traccia restringibile sulla traccia nulla, pertanto λ si trova ad avere due inversi. \square

Il problema è rimasto aperto: non ci si è soffermati troppo su questo argomento, preferendo indagare prima fatti “basilari” legati al rapporto tra preordine e convergenza.

3.2 Catene di tracce

Definizione. Su $T(x, y)$ è possibile definire una distanza d : dati $[f]_{\underline{R}}, [g]_{\underline{R}} \in T(x, y)$, si pone

$$d([f]_{\underline{R}}, [g]_{\underline{R}}) = \|\bar{f} - \bar{g}\| = \sup_{t \in [0,1]} \|\bar{f}(t) - \bar{g}(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Tale valore non dipende dalle scelte dei rappresentanti delle due tracce, dunque d è ben definita, e rende $T(x, y)$ uno spazio metrico.

Definizione. Una successione $\{\gamma_n\}$ di tracce sarà detta “restringente (strettamente)” se, per ogni n , $\gamma_{n+1} \preceq \gamma_n$ ($\gamma_{n+1} \prec \gamma_n$).

Nota. Una successione di cammini che dia luogo ad una successione restringente di tracce sarà detta anch’essa “restringente”.

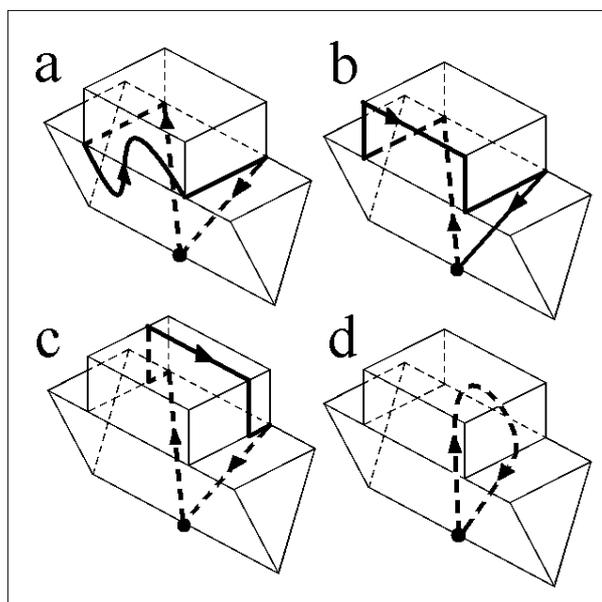


Figura 3.2: ... che si può restringere sulla traccia nulla.

Le proposizioni seguenti riguardano le successioni di tracce in $T(x, y)$. Ancora una volta, *a posteriori*, si è trovato un testo ([6, par. 8]) in cui vengono espressi e dimostrati concetti molto simili, compresa una definizione di “traccia” (che in [6] viene chiamata “curva continua”).

3.2.1 Controesempi

Proposizione. *Esistono successioni restringenti e non convergenti.*

Esempio. In \mathcal{S}^2 è facile costruire una successione restringente e non convergente, basta pensare ad una successione di cammini che vanno da un “polo” all’altro seguendo i “meridiani”, in modo tale che i meridiani relativi a due cammini consecutivi abbiano “distanza” costante (non nulla).

Per formalizzare l’esempio si può, pensando alle coordinate polari, considerare l’omeomorfismo tra \mathcal{S}^2 ed il rettangolo $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ su cui vengono identificati i punti (x, y) e (x', y') se $(x, x' \in \{0, 2\pi\}) \wedge (y = y')$ oppure se $y = y' \in \{0, \pi\}$. Definendo, per ogni numero reale a ,

$$[a]_{2\pi} \doteq \min \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x = a \pmod{2\pi}\},$$

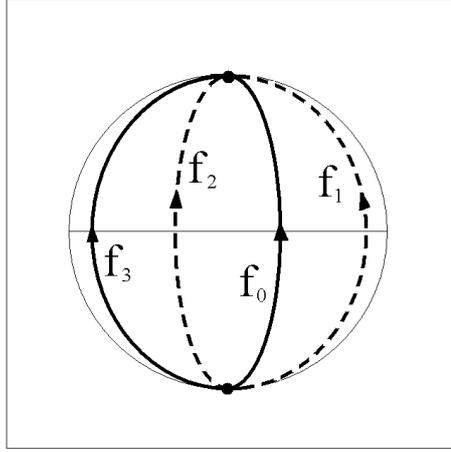


Figura 3.3: Successione restringente non convergente di tracce sulla sfera.

si può costruire, su tale spazio, una successione di cammini (parametrizzati in lunghezza d'arco), $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ponendo $f_n(t) = ([n\pi/2]_{2\pi}, t\pi)$ (figura 3.3). La corrispondente successione di tracce è restringente (è facile definire una Lomotopia tra ogni coppia di cammini consecutivi), e non convergente, infatti si calcola facilmente che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n(1/2) - f_{n+1}(1/2)\| = \sqrt{2}. \quad \square$$

Proposizione. *Esistono successioni strettamente restringenti e non convergenti.*

Esempio. Si prenda $X = [-2, 2] \subset \mathbb{R}$. (In questo modo X , essendo una varietà con bordo, non rispetta le ipotesi dettate in 1.2, ma si può sempre pensare, per esempio, che X sia un sottoinsieme di $\partial([-2, 2] \times [-2, 2]) \subset \mathbb{R}^2$.) Si pensi a due tipi di cammino: i cammini del primo tipo partono da 0, si allontanano verso sinistra superando il punto $-1/2$, poi invertono la loro direzione e proseguono verso destra fino a raggiungere il punto 1; quelli del secondo tipo partono sempre da 0 ma si allontanano verso destra, superano il punto $3/2$, poi tornano indietro proseguendo verso sinistra fino a raggiungere 1. Per avere la successione cercata basterà costruirne una che alterni i due tipi di cammini facendo in modo che la lunghezza di un cammino sia sempre maggiore di quella del successivo.

Si definiscono le successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dove $a_n = (-1)^n(1 + 1/2^n)$ e $b_n = (1/2) + a_n$. Per n dispari, il punto b_n rappresenterà il valore minimo del cammino n -esimo, per n pari il valore massimo. Si nota subito

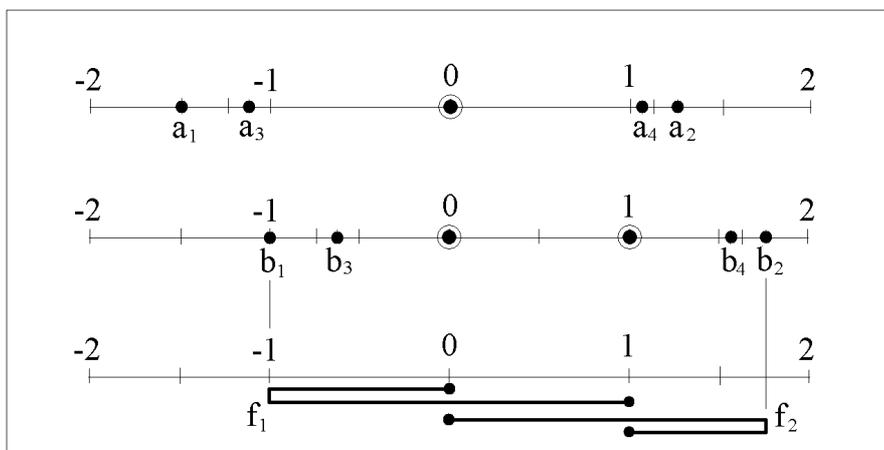


Figura 3.4: i primi elementi delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{f_n\}$.

che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n-1} = -1/2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = 3/2.$$

Utilizzando $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si definisce la successione di cammini $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ (figura 3.4),

$$f_n(t) = \begin{cases} 3t \min\{0, b_n\}, & t \in [0, 1/3]; \\ \begin{cases} [1 - 3(t - \frac{1}{3})] \min\{0, b_n\} + [3(t - \frac{1}{3})] \max\{1, b_n\}, & t \in [1/3, 2/3]; \\ [1 - 3(t - \frac{2}{3})] \max\{1, b_n\} + 3(t - \frac{2}{3}), & t \in [2/3, 1]. \end{cases} \end{cases}$$

L'omotopia *rel* $\{0, 1\}$ tra un cammino f_n ed il successivo è data da

$$H_n(t, x) = (1 - x)f_n(t) + xf_{n+1}(t).$$

Si calcola facilmente che $L(f_n) = 2|a_n|$ e che $L(H_n|_{I \times \{x\}}) = 2|a_n| - x/2^n$, dunque $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ è effettivamente una successione strettamente restringente di cammini.

Fin qui si è potuto ragionare sui cammini invece che sulle tracce; per dimostrare che la successione di tracce $\{[f_n]_{\mathbb{R}}\}$ non converge bisogna ragionare sui cammini parametrizzati in lunghezza d'arco. È facile calcolare che $\bar{f}_n(t) = -2|a_n|t$ per n dispari e $t \in [0, |b_n|/2|a_n|]$, da cui risulta $\bar{f}_n(t) \leq -1/4$ se $1/(8|a_n|) \leq t \leq |b_n|/2|a_n|$. Siccome $\sup_n 1/(8|a_n|) = 1/8 \leq 1/6 = \inf_n |b_n|/2|a_n|$, prendendo $t_0 = 1/7$ si può dire che, per ogni n dispari, $\bar{f}_n(t_0) \leq -1/4$, mentre per ogni n pari, $\bar{f}_n(t_0) > 0$. In conclusione si ha $\|f_n - f_{n+1}\| \geq 1/4$ per ogni n , per cui la successione di tracce, non essendo di Cauchy, non converge. \square

Per avere un riscontro visivamente più evidente dell'esistenza di successioni strettamente restringenti ma non convergenti si è pensato ad un secondo esempio, con cammini in \mathbb{R}^2 invece che in \mathbb{R} .

Esempio. Per cominciare, alcune considerazioni di tipo euristico. I cammini f_a e g_a in figura 3.5 hanno la stessa lunghezza e sono L-omotopi. Dei cammini f_a e f_b in figura 3.6, invece, si può dire che $f_b \prec f_a$. Come

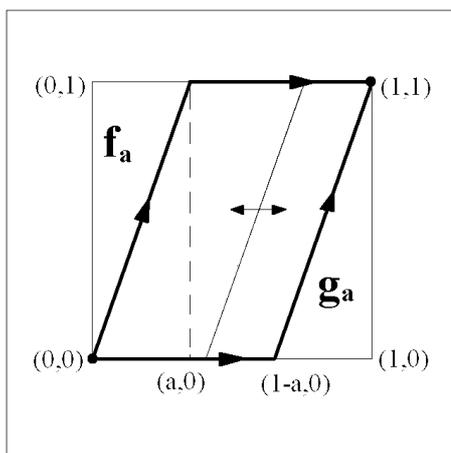


Figura 3.5: I cammini f_a e g_a .

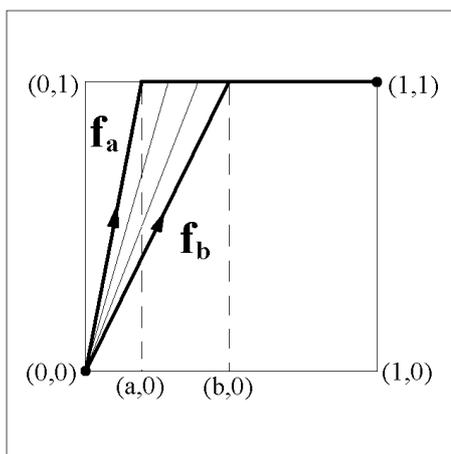


Figura 3.6: I cammini f_a e f_b .

nell'esempio precedente, l'idea è di alternare nella successione un cammino

del tipo f con uno del tipo g in modo che la lunghezza dei cammini decresca, ma senza che la successione abbia un limite. (Anche in questo caso si può pensare al quadrato $I \times I$ come sottoinsieme di una varietà del tipo richiesto in 1.2.) A tale scopo si definisce la successione crescente $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, dove $a_n = n/(2(n+1))$. Si nota subito che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$. La successione di cammini $(f_{a_1}, g_{a_2}, f_{a_3}, g_{a_4}, \dots)$ è strettamente restringente ma non convergente.

Ecco la formalizzazione del discorso appena fatto, comprese le dimostrazioni dei fatti dati per evidenti.

Definizione delle funzioni del tipo f :

$$f_a : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_a(t) = (t, \phi_a(t)),$$

dove

$$\phi_a : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_a(t) = \begin{cases} t/a, & t \in [0, a]; \\ 1, & t \in [a, 1]. \end{cases}$$

In altri termini, f_a è espressa come grafico di ϕ_a . La funzione g_a , invece, è il grafico di

$$\gamma_a : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_a(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1-a]; \\ (t - (1-a))/a, & t \in [1-a, 1]. \end{cases}$$

Le funzioni del tipo f e g sono ben definite e continue per $a \in (0, 1)$.

L'omotopia tra il generico cammino f_{a_k} e il successivo, $g_{a_{k+1}}$, si ottiene dalla "composizione" di due omotopie, una che porta da f_{a_k} a $f_{a_{k+1}}$, l'altra da $f_{a_{k+1}}$ a $g_{a_{k+1}}$. La prima omotopia (figura 3.6) sarà strettamente restringente, la seconda (figura 3.5) sarà una L-omotopia. Per semplificare le notazioni si prendono $a, b \in (0, 1/2)$, $a < b$ e si definisce l'omotopia $rel \{0, 1\}$ tra f_a e f_b come segue:

$$H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H(t, x) = \begin{cases} (t, t/\Delta(x)), & t \in [0, \Delta(x)]; \\ (t, 1), & t \in [\Delta(x), 1]; \end{cases}$$

dove si è definito $\Delta(x) = (1-x)a + xb$. Si dimostra che H è continua mostrando che, per ogni punto $(t_0, x_0) \in I \times I$, le due restrizioni

$$H|_{\{t_0\} \times I}, H|_{I \times \{x_0\}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

sono continue. Da semplici considerazioni geometriche si deduce che l'omotopia H è strettamente restringente. (Ragionando in modo analogo si costruisce facilmente un'omotopia strettamente restringente tra g_a e g_b .) Dato $b \in (0, 1/2)$, l'omotopia $rel \{0, 1\}$ tra f_b e g_b è data da:

$$K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad K(t, x) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, \Gamma(x)]; \\ (t, t - \Gamma(x)/b), & t \in [\Gamma(x), \Gamma(x) + b]; \\ (t, 1), & t \in [\Gamma(x) + b, 1]; \end{cases}$$

dove $\Gamma(x) = x(1-b)$. La continuità di K si dimostra come per H e si calcola immediatamente che la lunghezza dei cammini rimane costante durante la trasformazione, dunque K è una L-omotopia.

In definitiva si può affermare che la successione di cammini è strettamente restringente.

Tale successione dà luogo ad una successione di tracce, $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Indicando con $\bar{\gamma}_n$ il cammino parametrizzato in lunghezza d'arco rappresentante la traccia γ_n , si calcola che $L(\bar{\gamma}_n) = \sqrt{a_n^2 + 1} + (1 - a_n)$ e che, per n dispari,

$$\bar{\gamma}_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{a_n t}{P_n}, \frac{t}{P_n} \right), & t \in [0, P_n]; \\ \left(\frac{a_n(1-t) + (t - P_n)}{1 - P_n}, 1 \right), & t \in [P_n, 1]; \end{cases}$$

dove $P_n = \sqrt{a_n^2 + 1}/L(\bar{\gamma}_n)$. Per n pari basta calcolare che

$$\bar{\gamma}_n(t) = \left(t \frac{1 - a_n}{1 - P_n} \right), \quad \text{per } t \in [1 - P_n].$$

Per dimostrare che la successione di tracce non converge, basta trovare un $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon < P_n$ e $\epsilon < 1 - P_n$ per ogni n , e un $\delta > 0$ tale che $\epsilon/P_n > \delta$ per ogni n . In questo modo si potrà concludere che $|\bar{\gamma}_n(\epsilon) - \bar{\gamma}_{n+1}(\epsilon)| \geq \delta$ per ogni n dispari. Infatti si avrà $\bar{\gamma}_n(\epsilon) = (a_n \epsilon/P_n, \epsilon/P_n)$ con $\epsilon/P_n > \delta$, $\bar{\gamma}_{n+1}(\epsilon) = (\epsilon(1 - a_{n+1})/(1 - P_{n+1}), 0)$ e

$$|\bar{\gamma}_n(\epsilon) - \bar{\gamma}_{n+1}(\epsilon)| > \sqrt{\left(\frac{a_n \epsilon}{P_n} - \epsilon \frac{1 - a_{n+1}}{1 - P_{n+1}} \right)^2 + \delta^2} > \delta.$$

In concreto si trova che, per ogni n ,

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{a_n^2 + 1}}{2} < P_n < \sqrt{a_n^2 + 1} < \sqrt{2},$$

da cui risulta $P_n > 1/2$ e $1/P_n > 1/\sqrt{2}$, inoltre

$$1 - P_n > \frac{1 - a_n}{2} > \frac{1}{4}.$$

Quindi $0 < \epsilon < 1/4 \Rightarrow (\epsilon < P_n) \wedge (\epsilon < 1 - P_n)$. Prendendo $\epsilon = 1/5$, si avrà $\epsilon/P_n > \epsilon/\sqrt{2} = 1/5\sqrt{2}$. Ponendo $\delta = 1/6\sqrt{2}$ anche l'ultima condizione sarà soddisfatta. \square

Non è difficile escogitare altri esempi che dimostrino la non convergenza di successioni restringenti nel caso in cui $x = y$, cioè in $\mu(X, x_0)$.

3.2.2 Risultati generali

Dopo aver mostrato cosa *non* si può dire in generale, ecco alcuni risultati generali.

Lemma. *L'insieme dei cammini su X è chiuso in $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Se una successione di cammini su X , $\{f_k\}$, è di Cauchy, essendo $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ uno spazio metrico completo, esisterà un cammino f^* in $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f^*\| = 0.$$

Per ogni $t \in [0, 1]$, la successione $\{f_k(t)\}$ è una successione di punti in un compatto di \mathbb{R}^n che tende a $f^*(t)$, quindi f^* è un cammino su X . \square

Corollario. *Dati due punti $x, y \in X$, lo spazio metrico $T(x, y)$ è completo.*

Proposizione. *Una successione restringente ammette sempre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Per il teorema di Ascoli-Arzelà, una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ha una sottosuccessione convergente (uniformemente) se è equicontinua ed equilimitata. Si indichi con $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la generica successione restringente di cammini in X parametrizzati in lunghezza d'arco, e con π_i la funzione che proietta \mathbb{R}^n su \mathbb{R} in modo che

$$\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per ipotesi X è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , pertanto la successione $\{\pi_i \circ f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Inoltre essa è:

1. equilimitata;
2. equicontinua.

1. È equilimitata perchè X è limitato, in quanto sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n .

2. Si dimostrerà che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $t_1, t_2 \in [0, 1]$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |(\pi_i \circ f_k)(t_1) - (\pi_1 \circ f_k)(t_2)| < \epsilon.$$

Ricordando che i cammini sono parametrizzati in lunghezza d'arco e indicando con \mathcal{L}_k la funzione lunghezza d'arco di f_k , si può scrivere, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|f_k(t_1) - f_k(t_2)\| &\leq |\mathcal{L}_k(t_1) - \mathcal{L}_k(t_2)| = \\ &= \mathcal{L}_k(1) |t_1 - t_2| \leq \\ &\leq \mathcal{L}_0(1) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\|f_k(t_1) - f_k(t_2)\| \geq \max_{i=1, \dots, n} |(\pi_i \circ f_k)(t_1) - (\pi_1 \circ f_k)(t_2)|,$$

per cui,

$$|(\pi_i \circ f_k)(t_1) - (\pi_1 \circ f_k)(t_2)| \leq \mathcal{L}_0(1) |t_1 - t_2|.$$

Prendendo $\delta = \epsilon / \mathcal{L}_0(1)$ l'equicontinuità è dimostrata.

Si può dunque affermare che la successione $\{\pi_1 \circ f_k\}$ ha una sottosuccessione convergente, $\{\pi_1 \circ f_k^{(1)}\}$. Per lo stesso motivo, anche $\{\pi_2 \circ f_k^{(1)}\}$ ha una sottosuccessione convergente, $\{\pi_2 \circ f_k^{(2)}\}$. Procedendo induttivamente fino a $i = n$, si arriva a dire che $\{f_k^{(n)}\}$ è una sottosuccessione di $\{f_k\}$ tale che, per $i = 1, \dots, n$, $\{\pi_i \circ f_k^{(n)}\}$ converge, pertanto converge anche $\{f_k^{(n)}\}$. \square

Osservazione. Data una successione restringente e convergente, la lunghezza della traccia limite è sicuramente minore o uguale alla lunghezza di ognuna delle tracce della successione, questo perchè la variazione totale, vista come funzionale su $BV(I, \mathbb{R}^n)$, è inferiormente semicontinua ([6, par. 8, teor. 2]).

L'ultima proposizione si può vedere come caso particolare del seguente teorema.

Teorema [6, par. 8, teor. 1]. *Se la successione di curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ giacenti nel compatto K si può rappresentare parametricamente mediante funzioni equicontinue nell'intervallo $[0, 1]$, allora si può ricavare da essa una sottosuccessione convergente.*

Grazie all'osservazione fatta e al teorema appena citato si dimostra facilmente il seguente teorema, di fondamentale importanza per lo studio dei cammini minimali.

Teorema ([6, par. 8, teor. 3]). *Se due punti $x, y \in X$ si possono congiungere con un cammino di lunghezza finita, allora tra tutti questi cammini ne esiste uno di lunghezza minima.*

Adesso un risultato che chiama in causa esplicitamente il concetto di omotopia, cosa che non era ancora stata fatta nelle proposizioni precedenti.

Proposizione. *Ogni traccia di una successione restringente e convergente è omotopa al limite della successione relativamente a $\{0, 1\}$.*

Dimostrazione. Si indichi con $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la generica successione restringente e convergente di cammini su X rappresentanti le tracce e con f^* il suo limite. Basterà dimostrare che esiste uno $\xi \in \mathbb{N}$ tale che f_ξ è omotopo a f^* .

L'idea è di prendere un f_k così vicino a f^* da essere compreso in un "tubicino"—costruito attorno a f^* —che si possa "spezzare" in modo che ogni pezzo sia contenuto in una carta. Su ognuna di queste carte si costruirà un'omotopia "locale" tra f_k e f^* ; raccordando le diverse omotopie locali si avrà l'omotopia cercata.

Si costruisca una catena di carte con la seguente procedura. Indicando con ϵ il numero di Lebesgue di X , esisterà una carta (ϕ_0, U_0) tale che $X \cap D_\epsilon(f^*(0)) \subseteq U_0$. Tale carta sarà, chiaramente, la prima della catena. Se la traiettoria di f^* non è inclusa in U_0 , esisterà un $t_1 \in [0, 1]$ tale che $\|f^*(0) - f^*(t_1)\| = \epsilon(3/4)$ e $f^*([0, t_1]) \subset X \cap D_\epsilon(f^*(0))$, ed esisterà nell'atlante un aperto U_1 che conterrà $X \cap D_\epsilon(f^*(t_1))$ (figura 3.7). Procedendo in questo modo si raggiungerà $f^*(1)$ in un numero finito di passi. Se così non fosse, infatti, ponendo $t_0 = 0$ e indicando con \mathcal{L}^* la funzione lunghezza d'arco di f^* , si avrebbe $\mathcal{L}^*(t_{k+1}) - \mathcal{L}^*(t_k) \geq \epsilon(3/4)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui $\mathcal{L}^*(1) = +\infty$, che è assurdo, perchè deve essere $\mathcal{L}^*(1) = L(f^*) \leq L(f_k) \forall k$. A questo punto si può lavorare su una catena finita di carte, $((\phi_0, U_0), \dots, (\phi_s, U_s))$, cui corrisponde una catena di intervalli $([t_0, t_1], \dots, [t_s, t_{s+1}])$. Può capitare che, per un certo i , (ϕ_i, U_i) coincida con (ϕ_{i+1}, U_{i+1}) . In questo caso si può cancellare la carta (ϕ_{i+1}, U_{i+1}) e far corrispondere a (ϕ_i, U_i) l'intervallo $[t_i, t_{i+2}]$. Pertanto si può sempre supporre che due carte consecutive siano diverse.

Prima di costruire l'omotopia, bisogna trovare una funzione f_ξ in $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che (figura 3.8):

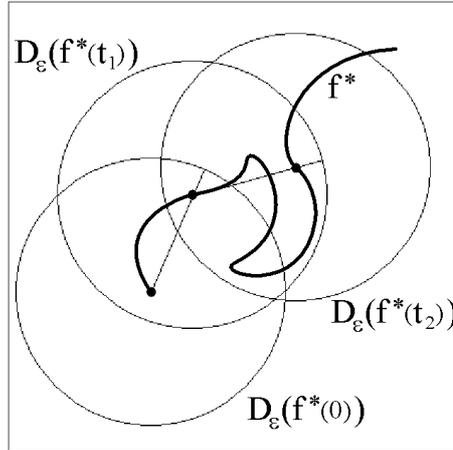
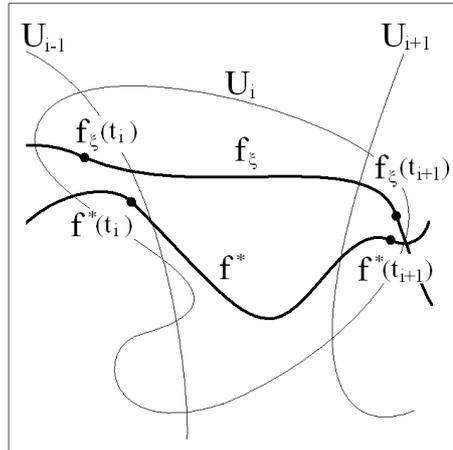


Figura 3.7: Costruzione della catena di carte.

Figura 3.8: Condizioni su f_ξ .

- $f_\xi([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, per $i = 0, 1, \dots, s$;
- $f_\xi(t_i) \in U_{i-1} \cap U_i$, per $i = 1, \dots, s$;
- esista un arco in $U_{i-1} \cap U_i$ che vada da $f_\xi(t_i)$ a $f^*(t_i)$, per $i = 1, \dots, s$.

Queste tre condizioni permetteranno di costruire le omotopie “locali”. Per trovare la funzione f_ξ bisogna dimostrare i seguenti fatti, collegati alle prime due condizioni:

1. per $i = 0, \dots, s$, il valore di $d_i \doteq \inf_{\{x \in \partial U_i, t \in [t_i, t_{i+1}]\}} \|f^*(t) - x\|$ non può essere nullo;
2. per $i = 1, \dots, s$, il valore di $e_i \doteq \inf_{\{x \in \partial U_{i-1} \cap \partial U_i\}} \|f^*(t_i) - x\|$ non può essere nullo;

1. L'affermazione è provata dal fatto che $f^*([t_i, t_{i+1}])$ e ∂U_i sono due chiusi disgiunti di \mathbb{R}^n , che è uno spazio metrico e quindi normale.

2. Il punto $f^*(t_i)$ appartiene all'aperto $U_{i-1} \cap U_i$, quindi non può appartenere a $\partial U_{i-1} \cap \partial U_i$, pertanto e_i non è nullo.

La conseguenza di tutto ciò è che $m \doteq \min_i \{d_i, e_i\} > 0$, pertanto, scegliendo ξ in \mathbb{N} in modo che $\|f_\xi - f^*\| < m$, il cammino f_ξ soddisferà le prime due condizioni richieste. Per quanto riguarda la terza condizione, basta osservare che X , essendo una varietà topologica, è localmente connesso per archi, quindi, per $i = 1, \dots, s$, esiste un $\delta_i > 0$ tale che $D_{\delta_i}(f^*(t_i)) \cap X$ sia connesso per archi. Scegliendo ξ in \mathbb{N} in modo che $\|f_\xi - f^*\| < \min_i \{m, \delta_i\}$ anche la terza condizione sarà soddisfatta.

Per costruire le omotopie locali si supporrà, come è lecito, che, per ogni carta (ϕ, U) , l'immagine di ϕ sia \mathbb{R}^d (dove d è la dimensione di X). Per definire la prima omotopia locale, si scelga un cammino g_1 che colleghi $f_\xi(t_1)$ con $f^*(t_1)$ e che sia contenuto in $U_0 \cap U_1$. L'insieme di punti $f_\xi([0, t_1]) \cup f^*([0, t_1]) \cup g_1([0, 1])$ è un chiuso di X , quindi la sua immagine tramite ϕ_0 è chiusa in \mathbb{R}^d . Tale chiuso costituisce lo “scheletro” dell'omotopia locale. Si consideri la frontiera dell'insieme $[0, t_1] \times [0, 1]$ e la seguente funzione K_0 su essa definita a valori in \mathbb{R}^d :

$$K_0(t, x) = \begin{cases} \phi_0(f_\xi(t)), & t \in [0, t_1], & x = 0; \\ \phi_0(f^*(t)), & t \in [0, t_1], & x = 1; \\ \phi_0(f^*(0)), & t = 0, & x \in [0, 1]; \\ \phi_0(g_1(x)), & t = t_1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

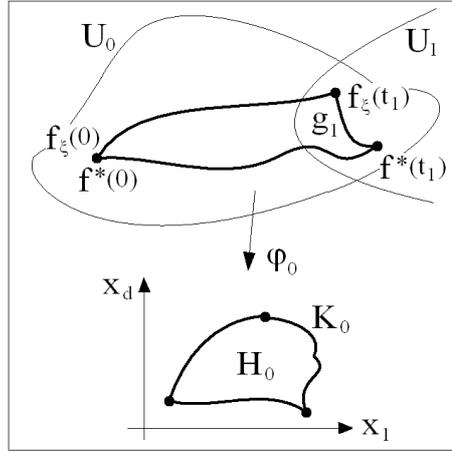


Figura 3.9: Costruzione della prima omotopia “locale” tra f_ξ e f^* .

Si noti che K_0 è continua. In particolare ogni proiezione su \mathbb{R} , $\pi_j \circ K_0$, è continua, per cui, secondo il teorema di Tietze, essa si può estendere in modo continuo su tutto \mathbb{R}^2 . Quindi K_0 stessa si può estendere ad una funzione continua H_0 definita su $[0, t_1] \times [0, 1]$ a valori in \mathbb{R}^d . Osservando che $\phi_0^{-1}(H_0(t, x))$ per costruzione è contenuto in U_0 per ogni coppia $(t, x) \in [0, t_1] \times [0, 1]$, si può affermare che $\phi_0^{-1}(H_0)$ è un’omotopia tra $f_\xi|_{[0, t_1]}$ e $f^*|_{[0, t_1]}$ relativamente a $\{0\}$, e rappresenta l’omotopia locale di cui si parlava (figura 3.9).

Utilizzando il cammino g_1 e un cammino g_2 costruito analogamente al primo su $U_1 \cap U_2$, e riutilizzando il teorema di Tietze, è facile costruire una seconda omotopia locale, $\phi_1^{-1}(H_1)$, su U_1 , tra $f_\xi|_{[t_1, t_2]}$ e $f^*|_{[t_1, t_2]}$, con H_1 estensione di

$$K_1(t, x) = \begin{cases} \phi_1(f_\xi(t)), & t \in [t_1, t_2], & x = 0; \\ \phi_1(f^*(t)), & t \in [t_1, t_2], & x = 1; \\ \phi_1(g_1(x)), & t = t_1, & x \in [0, 1]; \\ \phi_1(g_2(x)), & t = t_2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Procedendo in questo modo fino a costruire H_s e “attaccando” insieme le omotopie locali lungo la coordinata t si otterrà un’omotopia *rel* $\{0, 1\}$ tra f_ξ e f^* . \square

Il risultato più importante di questo paragrafo, in realtà, sarebbe dovuto essere la dimostrazione della seguente congettura, la cui verità, all’inizio, era sembrata ovvia. La proposizione precedente si può vedere come una sua parziale dimostrazione.

Congettura. *Il limite di una successione restringente e convergente è un restringimento di ognuna delle tracce della successione.*

Formalmente: data una successione $\{\gamma_n\}$ restringente e convergente con limite γ^* , è vero che $\gamma^* \preceq \gamma_n$ per ogni n ? Nonostante le “buone” ipotesi fatte sulla sottovarietà X , non si è riusciti a dimostrarlo, nè a trovare un controesempio.

Nel prossimo paragrafo si raccontano i tentativi fatti per dimostrarla e le nuove idee scaturite da questo studio.

3.3 Storia di una congettura

Un primo tentativo di dimostrare la congettura è stato fatto cercando di costruire un’omotopia tra la prima traccia della successione, γ_0 , e la traccia limite γ^* , utilizzando le omotopie tra le tracce della successione. Chiamando H_n l’omotopia (restringente) tra γ_n e γ_{n+1} , si può costruire una successione di omotopie, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, in questo modo (figura 3.10):

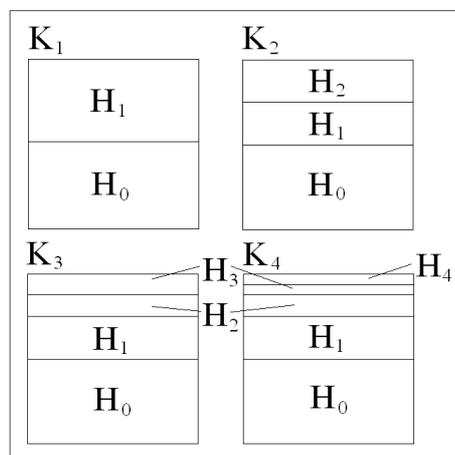


Figura 3.10: Primi elementi della successione di omotopie $\{K_n\}$.

$$K_1(t, x) = \begin{cases} H_0(t, 2x), & t \in [0, 1/2]; \\ H_1(t, 2(x - 1/2)), & t \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

$$K_2(t, x) = \begin{cases} K_1(t, x), & t \in [0, 1/2]; \\ H_1(t, 4(x - 1/2)), & t \in [1/2, 3/4]; \\ H_2(t, 4(x - 3/4)), & t \in [3/4, 1]; \end{cases}$$

e così via, con

$$K_n(t, x) = \begin{cases} K_{n-1}(t, x), & t \in [0, 1 - 1/2^{n-1}]; \\ H_{n-1}(t, 2^n(x - (1 - 1/2^{n-1}))), & t \in [1 - 1/2^{n-1}, 1 - 1/2^n]; \\ H_n(t, 2^n(x - (1 - 1/2^n))), & t \in [1 - 1/2^n, 1]. \end{cases}$$

A questo punto è ben definita la funzione limite

$$K_\infty(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(t, x).$$

Se K_∞ è continua, allora rappresenta effettivamente un'omotopia restringente tra γ_0 e γ^* (e in modo analogo si potrebbero definire le omotopie restringenti tra γ_n e γ^* per $n \in \mathbb{N}$). Il problema è che, in generale, essa non è continua: per definizione di continuità, infatti, si dovrebbe avere in particolare che

$$\forall (t, x) \in I \times I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \Rightarrow |K_\infty(t, x) - \gamma^*(t)| < \epsilon,$$

ma ciò non è sempre vero, come si evince dagli esempi seguenti.

Esempio. Utilizzando le coordinate polari su \mathcal{S}^2 come spiegato in 3.2.1 (primo esempio), si consideri la successione di cammini $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, con $f_n(t) = ((-1)^n \pi / 2^n]_{2\pi}, \pi t)$ (figura 3.11), e la successione di omotopie $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ (figura 3.12), dove

$$H_n(t, x) = ([-\frac{\pi}{2^n}(1-x) + (\frac{\pi}{2^{n+1}} - 2\pi)x]_{2\pi}, \pi t),$$

per n dispari, e

$$H_n(t, x) = ([\frac{\pi}{2^n}(1-x) + (-\frac{\pi}{2^{n+1}} + 2\pi)x]_{2\pi}, \pi t),$$

per n pari. Si trova che la successione di cammini (che sono parametrizzati in lunghezza d'arco) converge uniformemente a $f^*(t) = (2\pi, \pi t)$ (quindi anche la successione di tracce), ma ogni omotopia H_n "contiene" il cammino $f_\pi = (\pi, \pi t)$, pertanto K_∞ non è continua. \square

Esempio. In figura 3.13 sono mostrati i primi quattro elementi di una successione di tracce "a dente di sega", $\{\gamma_n\}$, convergente a γ^* . La successione è restringente in quanto tutte le tracce sono L-omotope tra di loro: in figura 3.14 è mostrato un criterio per costruire le L-omotopie. Utilizzando

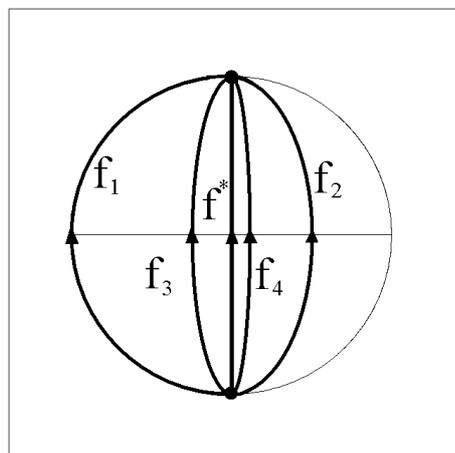


Figura 3.11: I primi elementi della successione convergente $\{f_n\}$.

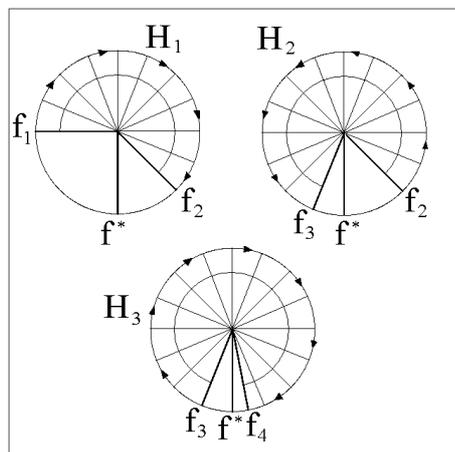


Figura 3.12: I primi elementi della successione di omotopie $\{H_n\}$.

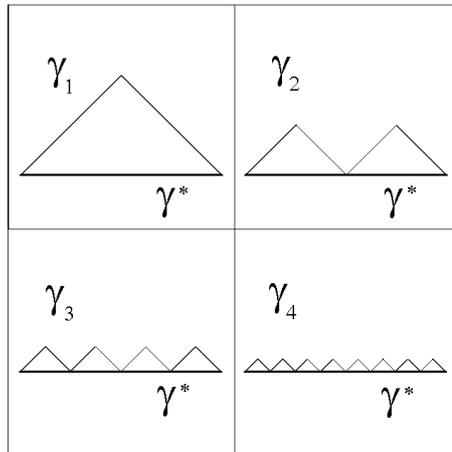


Figura 3.13: I primi elementi della successione di tracce “a dente di sega”.

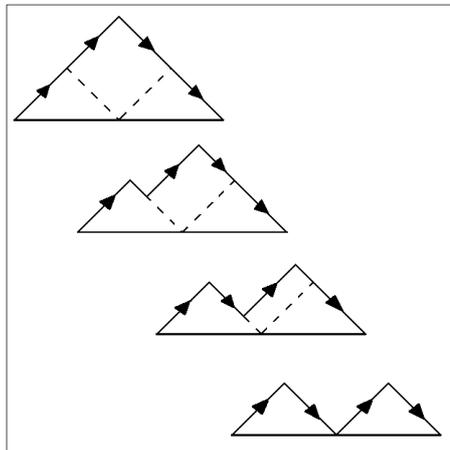


Figura 3.14: Criterio per costruire una L-omotopia tra due tracce “a dente di sega”.

le L-omotopie così costruite si trova effettivamente che K_∞ è un'omotopia che restringe γ_1 su γ^* (e quindi che $\gamma^* \preceq \gamma_n \forall n$), tuttavia un secondo modo di costruire le omotopie non porta alla stessa conclusione. Niente, infatti, impedisce di definire le L-omotopie facendo in modo che $H_n|_{I \times \{1/2\}} = \gamma_1$ per ogni n : facendo in questo modo K_∞ non sarebbe continua. \square

E' chiaro che, nei due esempi appena proposti, è stata una scelta "stupida" delle omotopie H_n ad impedire che K_∞ fosse continua: la semplicità delle situazioni lasciava ben intuire quale fosse la scelta migliore. Tuttavia è da dimostrare che, data una sottovarietà X come ipotizzato in 1.2, una "buona" scelta sia sempre possibile. Si potrebbe pensare che una scelta opportuna delle omotopie possa far sì che la funzione D_n di x ($D_n(x) = d([H_n]_{I \times \{x\}}|_{\underline{R}}, [f^*]_{\underline{R}})$) sia non crescente per ogni n , ma questo non è sempre vero, come si può immaginare leggendo il seguente esempio.

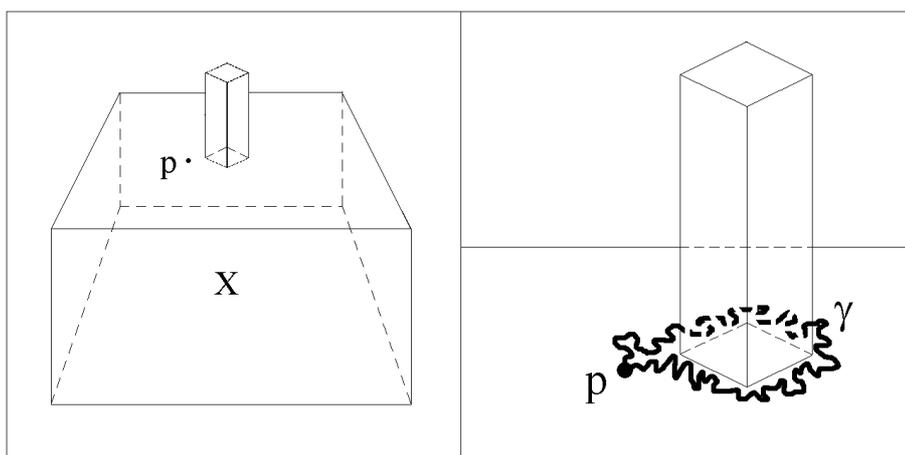


Figura 3.15: Una traccia che può restringersi su un punto, pur allontanandosene "momentaneamente".

Esempio. La figura 3.15 mostra, sulla sinistra, un solido formato da due scatole: a quella più grande è stato praticato un foro di forma quadrata sulla faccia superiore e su questo foro è stata appoggiata la scatola più piccola, privata della faccia inferiore, la quale coincide perfettamente con il foro. Ne risulta così un solido la cui superficie costituisce lo spazio X . La parte destra della figura mostra un punto p su X e un cappio γ avente p come punto base. Ora, se la traccia γ è *abbastanza lunga*, si può immaginare di farle risalire la scatola piccola facendola scivolare sulla sua superficie e, allo stesso tempo,

di farla restringere, fino a superare l'ostacolo e restringersi completamente su p . Durante questa trasformazione, però, a causa dell'altezza della scatola piccola, ci sarà un cammino intermedio la cui distanza da p sarà maggiore della distanza iniziale tra γ e p . \square

A questo punto la congettura da dimostrare potrebbe essere:

Congettura. *Data una successione di tracce restringente e convergente, è sempre possibile scegliere le omotopie (restringenti) H_n in modo che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} D_n(x) = 0.$$

Il desiderio di dimostrarla ha portato alla ricerca in letteratura di testi che si occupassero del rapporto tra topologia e ordine. Molto è stato scritto su topologie indotte da relazioni d'ordine, ma è chiaro che in questo lavoro ci si trova di fronte ad un preordine definito sugli elementi di uno spazio che è "già" topologico (lo spazio delle tracce con la distanza d). Alla fine è stato scoperto un libriccino ([7]) in cui tale argomento viene trattato esaurientemente. Purtroppo, come si vedrà tra poco, non porterà alla soluzione del problema. Si riportano ugualmente i risultati rilevanti per questo lavoro.

Definizione (introd., par. 4). Dato un insieme E , il "grafico" di un preordine (simbolo " \leq ") su E è il sottoinsieme di E^2 formato dai punti (x, y) , con $x, y \in E$, tali che $x \leq y$.

Definizione (introd., par. 4). Sia E un insieme preordinato. Un sottoinsieme $X \subset E$ è detto "chiuso verso il basso" o "down-closed" se $a \leq b$ e $b \in X$ implicano $a \in X$.

Ogni sottoinsieme $X \subset E$ determina in modo univoco un insieme chiuso verso il basso $d(X)$ che è il più piccolo tra gli insiemi decrescenti contenenti X ; un punto a appartiene a $d(X)$ se e solo se è possibile determinare un punto $b \in X$ tale che $a \leq b$.

Dualmente si definisce il concetto di insieme "chiuso verso l'alto" (o "up-closed") e del più piccolo insieme chiuso verso l'alto $i(X)$ contenente un dato sottoinsieme $X \subset E$.

Definizione (cap. 1, par. 1, punto 1). Si consideri uno spazio topologico E munito di un preordine. Si dirà che tale preordine è chiuso se il suo grafico nel quadrato E^2 è un sottoinsieme chiuso dello spazio topologico E^2 (con la topologia prodotto).

Proposizione (cap. 1, par. 1, prop. 1). *Il preordine di E è chiuso se e solo se, per ogni $a, b \in E$ tali che $a \leq b$ è falso, è possibile determinare un intorno crescente V di a ed un intorno decrescente W di b che siano disgiunti. Se il preordine di E è chiuso, allora per ogni punto $a \in E$, gli insiemi $d(a)$ e $i(a)$ sono chiusi.*

Era ciò che si cercava: grazie a questa proposizione, se si fosse dimostrato che il preordine “ \preceq ” era chiuso, si sarebbe trovata automaticamente la dimostrazione della prima congettura.

La brutta notizia è che il preordine “ \preceq ” non è chiuso. Il perchè è spiegato nell’esempio seguente.

Esempio. Si consideri la stessa situazione dell’ultimo esempio. La traccia γ , come detto, è restringibile sulla traccia costante in p . È anche vero che γ si può “accartocciare” su p mantenendo costante la sua lunghezza, nel senso che esiste una omotopia restringente H tra ω e γ tale che

$$\begin{aligned} H|_{I \times \{0\}} &= \omega; \\ H|_{I \times \{1\}} &= \gamma; \\ \forall x \in (0, 1], L(H|_{I \times \{x\}}) &= L(\gamma). \end{aligned}$$

(Un’omotopia del genere è stata già vista nell’esempio delle tracce “a dente

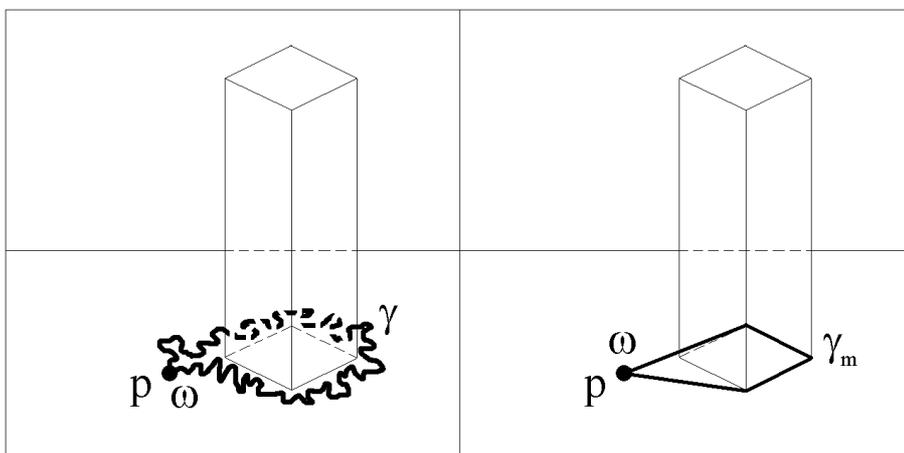


Figura 3.16: Una traccia che si può “accartocciare” su due tracce non confrontabili.

di sega”). In modo analogo γ si può “accartocciare” sulla traccia *minimale* γ_m con un’omotopia K (figura 3.16). Utilizzando i cammini contenuti in H e K si può costruire, in $\mu(X, p) \times \mu(X, p)$, una successione di coppie di tracce

$\{(\phi_n, \psi_n)\}$ che converge a (ω, γ_m) . Tale successione appartiene al grafico del preordine perchè le tracce sono tutte L-omotope tra loro. Come si vede, però, la coppia (ω, γ_m) non appartiene al grafico, perchè la due tracce non sono confrontabili. \square

Si osservi che il fatto che il preordine non è chiuso non significa che la congettura sia falsa, in quanto la proposizione dà solo una condizione sufficiente. Resta da indagare se, usando un'altra distanza su $\mu(X, x)$, si possa ottenere un preordine chiuso. Si potrebbe, per esempio, sfruttare il fatto di lavorare in $BV([0, 1], \mathbb{R}^n)$ e definire una distanza su $\mu(X, x)$ utilizzando la variazione di una funzione. Quest'ultima non è una norma, ma solo una seminorma, in quanto una funzione in $BV(I, \mathbb{R}^n)$ con variazione nulla è costante, ma non necessariamente nulla. Diventa una norma, però, se definita sull'intersezione tra $BV(I, \mathbb{R}^n)$ e l'insieme dei cappi su X con punto base fisso coincidente con l'origine di \mathbb{R}^n .

Un'alternativa potrebbe essere la definizione di una distanza tra le classi di L-omotopia invece che tra le tracce: in questo modo successioni di cammini L-omotopi come quella vista sulla sfera o quella con i cammini "a dente di sega" sarebbero del tutto inoffensive. Resta da capire, però, se tale definizione sia possibile.

Gli esempi e dalle considerazioni fatti finora hanno portato alla definizione di due ulteriori relazioni tra cammini, simili a quella di "restringimento". La prima definizione è stata ispirata dall'esempio delle funzioni "a dente di sega":

Definizione Dati due cammini su X , f e g , si dirà che f è un "accartocciamento" di g se f appartiene alla chiusura della classe di L-omotopia di g .

La seconda definizione è nata dalla considerazione che spesso, dati due cammini f e g con $L(f) \leq L(g)$, è molto più agevole trovare un cammino h tale che $h \preceq f$ e $h \preceq g$ (figura 3.17), piuttosto che un'omotopia che restringa g su f .

Definizione. Dati due cammini su X , f e g , si dirà che f è un "rilassamento" di g se esiste un'omotopia H tale che

$$\begin{aligned} H|_{I \times \{0\}} &= f, \\ H|_{I \times \{1\}} &= g, \\ H|_{\{0\} \times I} &\equiv f(0) = g(0), \\ H|_{\{1\} \times I} &\equiv f(1) = g(1), \end{aligned}$$

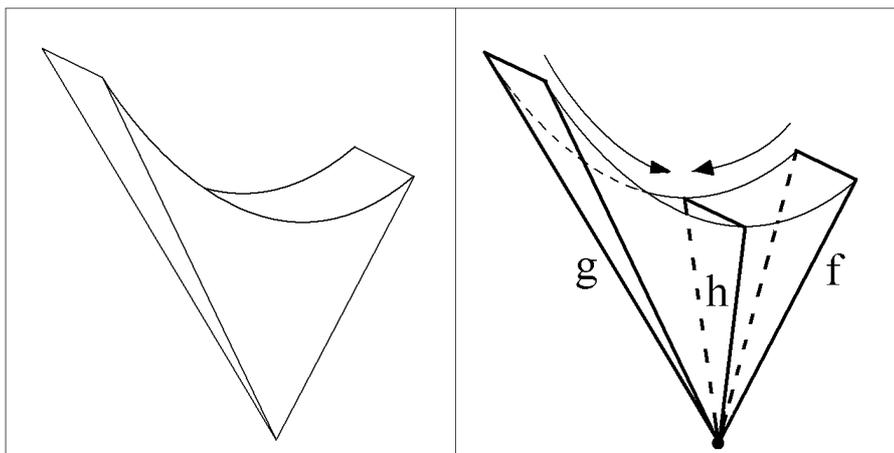


Figura 3.17: Tre cammini f, g, h tali che $h \preceq f$ e $h \preceq g$.

$$\forall x \in [0, 1], \quad L(H|_{I \times \{x\}}) \leq L(g).$$

In altre parole, mentre il “restringimento” rappresenta un filo che si deforma senza mai allungarsi, il “rilassamento” rappresenta un filo che si deforma senza mai superare la sua lunghezza iniziale, come se questa lunghezza fosse un valore limite oltre il quale il filo si spezzerebbe.

Si nota immediatamente che, se f è un restringimento di g , allora è anche un suo rilassamento; l’implicazione contraria, seppur evidente a livello intuitivo, deve essere ancora dimostrata.

Congettura. *Se un cammino f è un rilassamento di g , allora esiste un’omotopia che restringe g su f .*

Ciò equivarrebbe a dire che, dato un cammino f , l’insieme crescente $i(f)$ è totalmente preordinato.

Analogamente si può cercare di capire la relazione tra “restringimento” e “accartocciamento”, oppure dar vita ad una teoria basata sulla relazione di “rilassamento”, ovvero di “accartocciamento”, invece che su quella di “restringimento”, per vedere se le strutture risultanti hanno proprietà migliori.

Capitolo 4

Epilogo

Con il capitolo precedente si è chiusa l'esposizione dei risultati raggiunti e la discussione sulle proprietà che si suppongono vere. Nel prossimo paragrafo si propone un inquadramento teorico diverso dei concetti espressi finora (tracce, preordine tra i cammini) che potrebbe essere utile in futuro per riuscire a dimostrare qualche proprietà ulteriore. Si parlerà, in particolare, di teoria delle categorie e di topologia algebrica *diretta*.

4.1 Punti di vista

2-categorie. Punti, tracce e coppie ordinate di tracce costituiscono rispettivamente oggetti, mappe e celle di una 2-categoria. Per dimostrarlo si farà riferimento a [8, par. 2.1] dove vengono fornite le definizioni di “sesquicategoria” e “2-categoria”. Per comodità vengono ora riproposte quelle definizioni, modificate nella notazione per adattarle alle convenzioni di questa tesi.

In una sesquicategoria ci sono degli oggetti (x, y, \dots) , delle mappe $(t : x \rightarrow y, \dots)$ e delle celle $(\alpha : t \rightarrow s : x \rightarrow y, \dots)$. Senza considerare le celle, oggetti e mappe formano una categoria, dunque le mappe hanno una composizione associativa ($f : x \rightarrow y$ e $g : y \rightarrow z$ implica $fg : x \rightarrow z$) con identità 1_x . Le celle hanno una composizione “principale” ($\alpha : t \rightarrow s : x \rightarrow y$ e $\beta : s \rightarrow r : x \rightarrow y$ implica $\alpha\beta : t \rightarrow r : x \rightarrow y$) (figura 4.1) anch'essa associativa e con identità 1_t .

Tra celle e mappe esiste una composizione “whisker” (mista) (figura 4.2) $h\alpha k : htk \rightarrow hsk : w \rightarrow z$ che gode delle seguenti proprietà:

- $1_x\alpha 1_y = \alpha$;

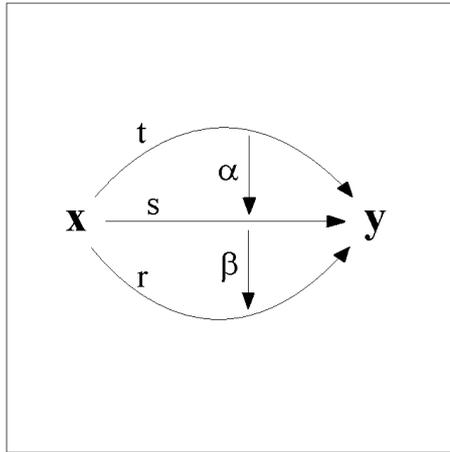


Figura 4.1: Composizione *principale* tra celle.

- $h1_t k = 1_{htk}$;
- $h'(h\alpha k)k' = (h'h)\alpha(kk')$;
- $h(\alpha\beta)k = (h\alpha k)(h\beta k)$.

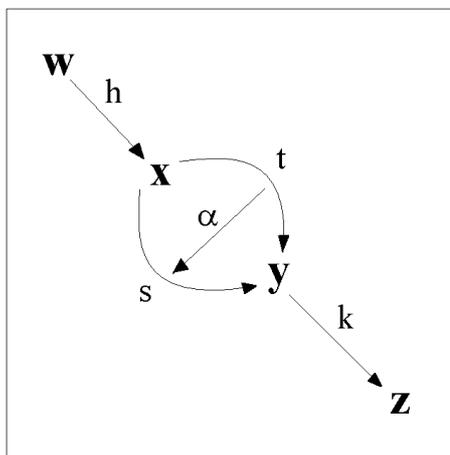


Figura 4.2: Composizione *whisker*.

Una sesquicategoria è una 2-categoria (stretta) se e solo se vale la seguente relazione (figura 4.3):

- $(\alpha r)(s\gamma) = (t\gamma)(\alpha q)$.

In questo caso si può definire una *seconda* composizione tra celle $\alpha \circ \gamma : tr \rightarrow sq : x \rightarrow z$ come risultato comune dei due termini precedenti.

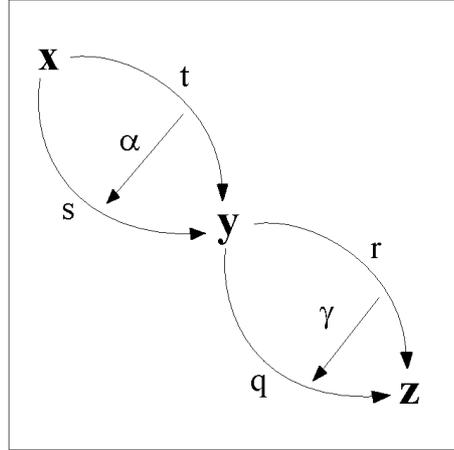


Figura 4.3: Schema per la definizione di 2-categoria.

Verrà ora mostrato come, prendendo per oggetti i punti di X , per mappe le tracce e per celle le coppie ordinate di tracce del tipo (t, s) (dove $t \preceq s$), si ottiene effettivamente una 2-categoria. Si osservi che, in questo contesto, è lecito confondere la cella $\alpha : t \rightarrow s : x \rightarrow y$ con la coppia ordinata (t, s) in quanto tale cella è l'unica esistente tra t ed s .

Ricordando quanto detto nel primo lemma di 2.3, si può subito affermare che l'operazione di concatenazione definita sulle tracce invece che sui cammini è associativa. Inoltre, dato il punto $x \in X$, la mappa identità su x è la classe di riparametrizzazione del cammino costante $1_x(t) \equiv x$.

La composizione *principale* tra celle si definisce immediatamente: $(t, s) : t \rightarrow s : x \rightarrow y$ e $(s, r) : s \rightarrow r : x \rightarrow y$ implica $(t, s)(s, r) = (t, r) : t \rightarrow r : x \rightarrow y$ (proprietà transitiva del preordine). Essa è associativa ed ogni traccia t ha come cella identità (t, t) .

La composizione *whisker* è data da $h(t, s)k = (htk, hsk) : htk \rightarrow hsk : w \rightarrow z$. Ecco la verifica delle prime quattro proprietà:

- $1_x(t, s)1_y = (1_x t 1_y, 1_x s 1_y) = (t, s)$;
- $h(t, t)k = (htk, htk) = 1_{htk}$;
- $h'(h(t, s)k)k' = h'(htk, hsk)k' = (h'htkk', h'hskk') = h'h(t, s)kk'$;

$$\begin{aligned}
- h((t, s)(s, r))k &= h(t, r)k = (htk, hrk) = (htk, hsk)(hsk, hrk) = \\
&= (h(t, s)k)(h(s, r)k).
\end{aligned}$$

Per finire, la condizione per avere la 2-categoria:

$$\begin{aligned}
- ((t, s)r)(s(r, q)) &= (tr, sr)(sr, sq) = (tr, sq) = (tr, tq)(tq, sq) = \\
&= (t(r, q))(t, s)q.
\end{aligned}$$

Spazi topologici diretti. Un fatto che finora è stato soltanto accennato, senza essere approfondito, è la possibilità di guardare gli oggetti di cui ci si è occupati (tracce, omotopie ecc.) da un punto di vista più “ampio”: una volta definita una struttura di spazio metrico sull’insieme di tracce $T(x, y)$, è possibile considerare le omotopie stesse ($rel \{0, 1\}$) definite sugli elementi di $T(x, y)$ come dei cammini nello spazio topologico $T(x, y)$. In questo modo, però, non sarebbe possibile distinguere una semplice omotopia da una omotopia restringente. Gli strumenti per fare questa distinzione in modo da poter lavorare solo con omotopie restringenti li fornisce la topologia algebrica *diretta* (una recente branca della topologia algebrica). In [9] si può trovare un’introduzione all’argomento e la seguente definizione:

Definizione (1.1). Uno “spazio topologico diretto” (o “d-spazio”) (X, dX) è uno spazio topologico X con un insieme dX di applicazioni continue $a: I \rightarrow X$, chiamate “cammini diretti”, che soddisfano i tre assiomi seguenti:

- (cammini costanti) ogni applicazione costante è un cammino diretto;
- (riparametrizzazioni) dX è chiuso rispetto alla composizione con applicazioni (debolmente) crescenti $I \rightarrow I$;
- (concatenazione) dX è chiuso rispetto alla concatenazione (definita come sui cammini usuali).

Sempre in [9], nell’esempio introduttivo, si può vedere come costruire un d-spazio a partire da uno spazio topologico *preordinato* (X, \leq) : basta definire come elementi di dX tutte le applicazioni continue del tipo $a: I \rightarrow X$ tali che $t_0 \leq t_1 \Rightarrow a(t_0) \leq a(t_1)$, cioè applicazioni che riflettono sulla loro immagine l’ordine “naturale” di $[0, 1]$. Si verifica immediatamente, infatti, che tale dX soddisfa i tre assiomi. Ritornando a $T(x, y)$, si può concludere, dunque, che le *omotopie restringenti* definite tra elementi $T(x, y)$ si possono vedere come *cammini diretti* in $T(x, y)$ stesso.

4.2 Esperimenti

Le sperimentazioni si sono concentrate sull'individuazione dei cammini minimali in due sottovarietà di \mathbb{R}^3 , un ellissoide ed un cubo. Si riteneva che lo studio di queste superfici fosse semplice come lo sono le superfici stesse; in realtà sono venuti fuori dei risultati inaspettati che hanno mostrato come questo studio non sia affatto banale.

Ellissoide. Si consideri un ellissoide di rotazione (detto anche “sferoide”), di equazione

$$\frac{(x-r)^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + z^2 = 1,$$

con $r \in (0, 1)$ e punto base nell'origine degli assi (figura 4.4). Si intersechi

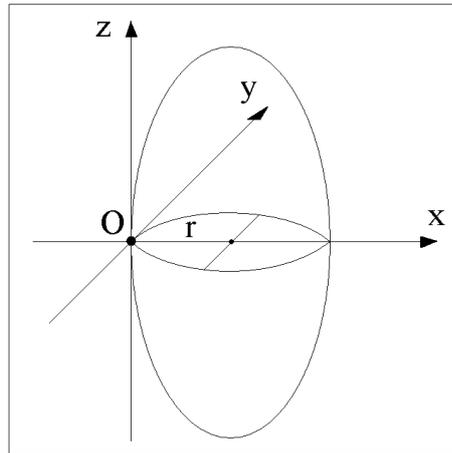


Figura 4.4: Un ellissoide.

l'ellissoide con il piano di equazione $z = kx$, $k \in \mathbb{R}$. È un risultato noto in geometria che le curve risultanti sono ellissi; ciò che si vuol vedere è come si comporta la loro lunghezza all'aumentare di k ed, in particolare, se e quando il coppia individuato da $k=0$ è minimale. La lunghezza di un'ellisse in funzione dei due semiassi a, b ($a > b$), è data dalla seguente serie (MacLaurin, 1742):

$$L(a, b) = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{13}{24}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{135}{246}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right],$$

dove e è l'eccentricità ($e = \sqrt{1 - (b^2/a^2)}$). Nel caso in esame la lunghezza del semiasse maggiore $a = a(r, k)$ è uguale alla metà della lunghezza del vettore

\mathbf{p} individuato dall'intersezione non banale della retta $\{z = kx, y = 0\}$ con l'ellissoide (figura 4.5). Risulta

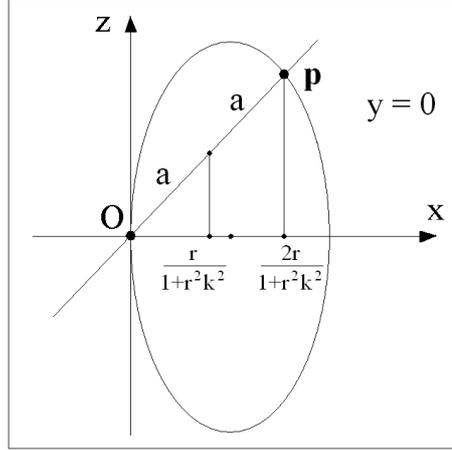


Figura 4.5: Il vettore che determina il semiasse a .

$$\mathbf{p} = \left(\frac{2r}{1+r^2k^2}, 0, \frac{2rk}{1+r^2k^2} \right), \quad a = \frac{r\sqrt{1+k^2}}{1+r^2k^2}.$$

Per trovare $b(r, k)$ si può calcolare la distanza dal punto $\mathbf{p}/2$ di uno dei due punti dati dall'intersezione della retta $\{x = r/(1+r^2k^2), z = kx\}$ con l'ellissoide. I valori di b ed e sono:

$$b = \frac{r}{\sqrt{1+r^2k^2}}, \quad e = k \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Derivando $L(r, k)$ rispetto a k si trova che la restrizione $L|_{\{r\} \times \mathbb{R}}$ ha sempre un punto critico in 0, come ci si poteva aspettare. In particolare si trova che

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} \right|_{k=0} = \pi r(1-3r^2),$$

pertanto tale punto critico è un *massimo* per $r \in (1/\sqrt{3}, 1)$ (coerentemente con ciò che succederebbe sulla sfera) e un *minimo* per $r \in (0, 1/\sqrt{3})$.

La conclusione è che, per $r \in (1/\sqrt{3}, 1)$, il coppia avente come traiettoria l'intersezione tra l'ellissoide ed il piano $z = 0$ e come punto base O non è *minimale*. Al contrario, invece, non si può dire che, per ogni $r \in (0, 1/\sqrt{3})$, quel coppia sia *minimale*, perchè il fatto che l'omotopia descritta in questo

esempio non è restrigente non implica che non esistano omotopie restringenti tra il cappio e il cammino nullo.

La cosa risulterà più chiara se si pensa all'ellissoide come ad una superficie *differenziabile* di \mathbb{R}^3 con le relative geodetiche. Ricordando che una condizione necessaria affinché una curva sia una geodetica è che la sua "accelerazione" sia ortogonale alla superficie, si può osservare che nessuna delle ellissi descritte in quest'esempio soddisfa questa condizione, eccetto l'ellisse (che poi è una circonferenza) individuata da $k = 0$. Quindi tra il punto \mathbf{p} in figura 4.5 e l'origine 0 passano sicuramente due tratti di geodetiche "speculari" che formano un cappio passante per \mathbf{p} con punto base in 0 il quale ha lunghezza sicuramente inferiore all'ellisse passante per \mathbf{p} .

Cubo. Il discorso seguente non pretende di essere rigoroso, ma solo di mettere in luce alcuni curiosi risultati che potrebbero aprire la strada ad uno studio più approfondito.

Alcune caratteristiche comuni a tutti i cammini minimali diventano subito evidenti appena si fa un po' di "pratica" sulla superficie del cubo:

- ogni cappio minimale è formato da segmenti di retta;
- ognuno di tali segmenti non può mai sovrapporsi ad uno spigolo, ma solo "incrociarlo";
- nessun cappio minimale può "passare" sopra un vertice.

La figura 4.6 mostra come un cammino che passa su un vertice possa sempre essere "ristretto" localmente.

Sono stati studiati, in particolare, i cappi minimali con punto base coincidente con il centro di una faccia. Oltre ai due cappi minimali (quattro, in realtà, considerando due versi di percorrenza per ognuno) che circondano il cubo come in un pacco dono (figura 4.7), subito evidenti, ne sono stati trovati altri che si allontanano dal punto base con "pendenza" razionale (in figura 4.8 se ne può vedere uno con "pendenza" uguale a 2). È possibile costruire altri cappi minimali analoghi osservando che:

- condizione necessaria affinché un cappio con punto base nel centro di una faccia sia minimale è che la sua "pendenza" sia razionale o infinita;
- il cappio non è minimale se la sua "pendenza" è un numero razionale p/q tale che $p * q = 1 \pmod{2}$.

Il secondo punto nasce dal fatto che, se fosse $p * q = 1 \pmod{2}$, il cappio "passerebbe" su un vertice. Il sospetto è che ogni cappio con punto base nel

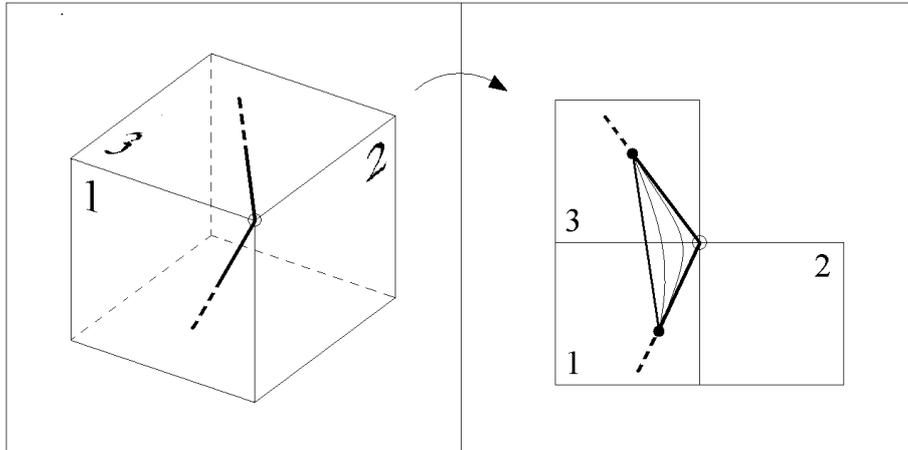


Figura 4.6: Un cammino minimale del cubo non può “passare” su un vertice.

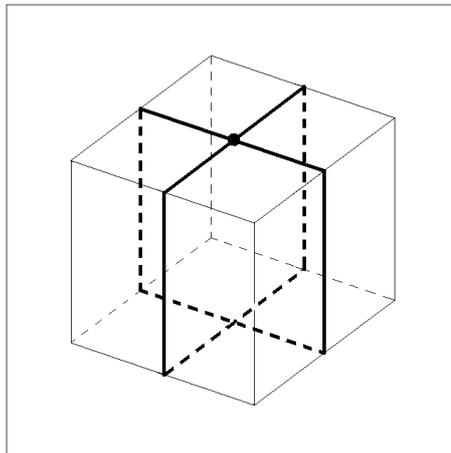


Figura 4.7: Due cammini minimali “semplici”.

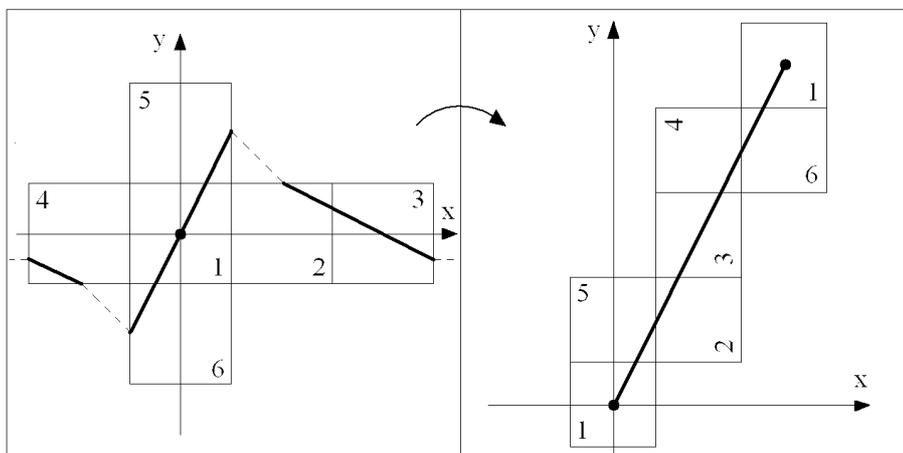


Figura 4.8: Un coppia minimale con “pendenza” 2.

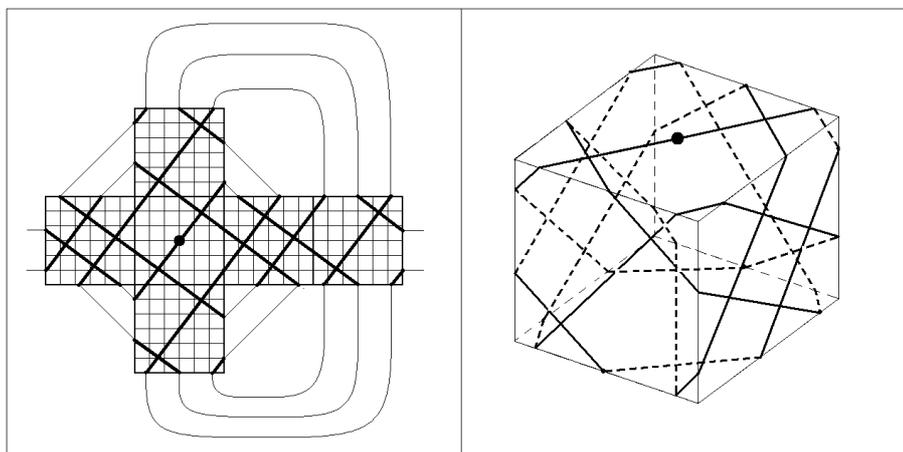


Figura 4.9: Un coppia minimale con “pendenza” 4/3.

centro di una faccia e con “pendenza” razionale p/q tale che $p * q = 0 \pmod{2}$ sia minimale, ma non è stato ancora dimostrato (è impossibile, infatti, riempire il piano ripetendo copie di uno sviluppo del cubo, per cui ogni cammino, quando viene rappresentato sul piano come visto in figura 4.8, dà luogo ad una situazione diversa). Non è tutto: ricordando quanto detto in 3.1, è possibile che tali cammini, in qualche senso, possano essere (rap)presentati come un gruppo di parole con un numero *finito* di generatori.

Dai due casi visti emerge la necessità, da un lato, di “approfittare” dell’esistenza delle geodetiche nelle sottovarietà *differenziabili* di \mathbb{R}^n per trovare i cappi minimali e dimostrarne l’esistenza, dall’altro (cosa ben più ardua) di definire una nozione simile a quella di “geodetica” per sottovarietà *topologiche* di \mathbb{R}^n , in modo da poter fare gli stessi ragionamenti anche su questo tipo di varietà.

Appendice A

Appendice

Si ringrazia il prof. Davide Guidetti per aver fornito il seguente calcolo, che consente di ricavare l'espressione della lunghezza dell'ellisse utilizzata in 4.2.

Equazione cartesiana della generica ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ con } a > b > 0.$$

Rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi].$$

Integrale che esprime la lunghezza dell'ellisse:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta))^{1/2} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(\theta) + \frac{b^2}{a^2} \cos^2(\theta) \right)^{1/2} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \cos^2(\theta) \right)^{1/2} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} (1 - e^2 \cos^2(\theta))^{1/2} d\theta. \end{aligned}$$

L'integrando è della forma

$$\begin{aligned}
 (1+y)^{1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} y^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1(1-2)\dots(1-2(k-1))}{k! 2^k} y^k \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2-1)\dots(2(k-1)-1)}{k! 2^k} y^k \\
 &= 1 + \frac{y}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!} y^k,
 \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
 (1-y)^{1/2} &= 1 - \frac{y}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!} (-1)^k y^k \\
 &= 1 - \frac{y}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} y^k.
 \end{aligned}$$

Ponendo $y = e^2 \cos^2(\theta)$ si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 L &= a \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{e^2 \cos^2(\theta)}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} e^{2k} \cos^{2k}(\theta) \right] d\theta \\
 &= a \left\{ 2\pi - \frac{e^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} e^{2k} \int_0^{2\pi} \cos^{2k}(\theta) d\theta \right\}.
 \end{aligned}$$

Gli integrali si possono calcolare in questo modo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos^{2k}(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^{2k} d\theta \\
 &= \frac{1}{4^k} \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2k} d\theta \\
 &= \frac{1}{4^k} \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{2k} \binom{2k}{r} e^{i(2k-r)\theta} e^{-ir\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{4^k} \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{2k} \binom{2k}{r} e^{i2(k-r)\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} 2\pi = \frac{1}{4^k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} 2\pi \\
 &= 2\pi \frac{(2k)!}{[(2k)!!]^2}.
 \end{aligned}$$

Sostituendo, si ottiene:

$$L = a \left\{ 2\pi - \frac{e^2}{2} \pi - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} e^{2k} 2\pi \frac{(2k)!}{[(2k)!!]^2} \right\}.$$

Un ultimo conto per semplificare i fattoriali:

$$\begin{aligned} \frac{(2k-3)!! (2k)!}{(2k)!! [(2k)!!]^2} &= \frac{(2k-3)!! (2k-1)!! (2k)!!}{(2k)!! [(2k)!!]^2} \\ &= \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 \frac{1}{2k-1}. \end{aligned}$$

Concludendo, la lunghezza dell'ellisse è

$$L = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{e^2}{4} - \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 \frac{e^{2k}}{2k-1} \right\}.$$

Bibliografia

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, 2002, Cambridge University Press.
Disponibile in pdf all'indirizzo web www.math.cornell.edu/~hatcher/.
- [2] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, 1980, Cambridge University Press.
In italiano: *Introduzione alla Topologia Algebrica*, 1988, Ed. Zanichelli.
- [3] E. Sernesi, *Geometria 2*, 1994, Ed. Bollati Boringhieri.
- [4] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 1971, Vol. 5 di *Graduate Texts in Mathematics* (1998), Springer Verlag.
- [5] U. Fahrenberg, M. Raussen, *Reparametrizations of Continuous Paths*, 2007, arXiv e-prints. Disponibile in pdf all'indirizzo web www.math.uni-hamburg.de/home/schreiber/contreps.pdf.
- [6] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, 1980, Edizioni Mir.
- [7] L. Nachbin, *Topology and Order*, 1965, Ed. Van Nostrand Mathematical Studies.
- [8] M. Grandis, *Modelling fundamental 2-categories for directed homotopy*, 2006, in *Homology Homotopy Appl.* 8, 31–70.
- [9] M. Grandis, *Directed Homotopy Theory, I. The fundamental Category*, 2003, in *Cah. Topol. Géom. Diff. Catég.* 44, 281–316.
Gli articoli di M. Grandis si possono trovare sul suo sito personale: www.dima.unige.it/~grandis/.