

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SEPARAZIONE DI PUNTI CRITICI
IN UN ESEMPIO
DI TEORIA DELLA TAGLIA
MULTIDIMENSIONALE

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
CRISTINA LIPPI

Correlatore:
Dott.ssa
BARBARA DI FABIO

Sessione II
Anno Accademico 2006-2007

*“ ... un qualsiasi universo non è in realtà
una vera e propria cosa,
ma solo un modo di osservare
quel che tecnicamente è definito GCG,
o Gran Casino Generale ... ”*

Douglas Adams

Introduzione

L'analisi e il confronto di immagini digitali, provenienti da immagini naturali, sta diventando sempre più importante in molti ambiti tra cui quello medico. La teoria delle funzioni di taglia risulta essere particolarmente indicata per questi scopi.

Questa tesi ha lo scopo principale di analizzare e migliorare un esempio particolare riguardante le applicazioni delle funzioni di taglia: si vogliono distinguere due varietà, una sfera S e la varietà C definita come bordo di un cubo di lato 2 centrato nell'origine.

Nel primo capitolo viene introdotta la teoria sulle funzioni di taglia. Sono date le definizioni sia nel caso unidimensionale sia in quello multidimensionale e vengono enunciate alcune proprietà utili per i calcoli successivi.

Si forniscono poi, nel secondo capitolo, le nozioni di gruppi di omologia e funzioni di Morse. Nella prima sezione, sui gruppi di omologia, si vogliono principalmente trovare metodi per calcolare i gruppi di omologia di gradi 1 e 2 per varietà di dimensione al massimo due senza dover ricorrere ai calcoli formali. Nella sezione riguardante le funzioni di Morse si enunciano alcune proprietà importanti di queste funzioni, che giustificano la richiesta di utilizzarle come funzioni misuranti, sempre con una particolare attenzione all'aspetto intuitivo della situazione.

Il terzo capitolo è la descrizione del lavoro già svolto dalla dott.ssa Barbara Di Fabio. Le varietà S e C vengono confrontate utilizzando come funzione misurante il valore assoluto di x per il caso unidimensionale e la funzione $(|x|, |z|)$ nel caso multidimensionale. Si analizzano poi i margini di migiora-

mento di questo esempio.

Nel quarto capitolo viene spiegato il lavoro svolto, ovvero il confronto delle varietà S e C tramite funzioni di taglia e gruppi di omologia associati a due diverse funzioni misuranti. Si è cercato di dare una spiegazione della situazione che risulti il più possibile intuitiva, anche tramite immagini che aiutino a visualizzare la situazione.

Infine, nel quinto capitolo si danno alcuni spunti per il lavoro ancora da svolgere, in quanto gli esempi finora studiati non hanno permesso di soddisfare pienamente le richieste.

Indice

1	Funzioni di taglia	1
1.1	Funzioni di taglia unidimensionali	1
1.2	Funzioni di taglia multidimensionali	4
2	Gruppi di omologia e funzioni di Morse	9
2.1	Gruppi di omologia	9
2.2	Funzioni di Morse	12
3	Caso particolare iniziale	17
3.1	Caso multidimensionale	19
3.2	Alcune osservazioni	23
4	Modifiche alla costruzione iniziale	25
4.1	Variazione analizzata	25
4.2	Altra possibilità	34
5	Conclusioni	37

Capitolo 1

Funzioni di taglia

Si danno, in questo capitolo, le nozioni di funzioni di taglia unidimensionale e multidimensionale che verranno utilizzate in seguito nello studio di un esempio particolare. Si vedranno alcune proprietà e risultati utili per gli scopi di questa tesi, senza la pretesa di essere esaurienti.

1.1 Funzioni di taglia unidimensionali

Si consideri uno spazio topologico M che assumeremo essere non vuoto, compatto, Hausdorff e localmente connesso e una funzione $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua che sarà chiamata funzione misurante.

Definizione 1.1. La coppia (M, φ) formata dallo spazio topologico e dalla funzione misurante è detta *coppia di taglia*.

Definizione 1.2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si definisce una relazione $\simeq_{\varphi \leq x}$ sui punti di M data da:

$$P \simeq_{\varphi \leq x} Q \Leftrightarrow \begin{cases} P = Q \\ P \text{ e } Q \text{ sono } (\varphi \leq x) - \text{omotopi} \end{cases}$$

dove $P, Q \in M$ e chiedere che P e Q siano $(\varphi \leq x)$ -omotopi significa chiedere che esista un cammino continuo $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tale che $\alpha(0) = P$, $\alpha(1) = Q$ e $\varphi(\alpha(t)) \leq x$ per ogni $t \in [0, 1]$. In questo caso α è detta $(\varphi \leq x)$ -omotopia da P a Q .

Osservazione 1. La relazione $\simeq_{\varphi \leq x}$ è una relazione di equivalenza su M per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si denota con $M\langle\varphi \leq x\rangle$ l'insieme $\{P \in M \mid \varphi(P) \leq x\}$.

Si considera ora l'insieme $\Delta^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ e due valori (che saranno detti livelli) $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \leq y$.

Definizione 1.4. La funzione $l_{(M, \varphi)} : \Delta^+ \rightarrow \mathbb{N}$ che associa alla coppia $(x, y) \in \Delta^+$ la cardinalità dell'insieme $\frac{M\langle\varphi \leq x\rangle}{M\langle\varphi \leq y\rangle}$, ovvero il numero di classi di equivalenza in cui $M\langle\varphi \leq x\rangle$ è diviso dalla relazione $\simeq_{\varphi \leq y}$, è detta *funzione di taglia* (unidimensionale) associata alla coppia di taglia (M, φ) .

Osservazione 2. Il valore della funzione di taglia $l_{(M, \varphi)}$ ha un'interpretazione geometrica molto semplice: conta il numero di componenti connesse per archi di $M\langle\varphi \leq y\rangle$ che contengono almeno un punto di $M\langle\varphi \leq x\rangle$.

Si può quindi disegnare il grafico della funzione di taglia nel semipiano Δ^+ : ogni volta che si ha una nuova componente connessa per archi per $M\langle\varphi \leq x\rangle$ si traccia una linea verticale e ogni volta che due componenti connesse per archi di $M\langle\varphi \leq y\rangle$ si uniscono, si traccia una linea orizzontale. Si ottiene così una rappresentazione con vari triangoli sovrapposti, all'interno dei quali la funzione di taglia è costante. La prima retta verticale che si traccia è detta retta d'angolo, i punti d'angolo dei triangoli sono detti *corner point*.

Si può vedere meglio il calcolo della funzione di taglia con un esempio: la varietà M è la curva disegnata in figura 1.1 e la funzione φ è la funzione altezza, $\varphi(x, y) = y$. La funzione di taglia relativa alla coppia (M, φ) è disegnata a fianco.

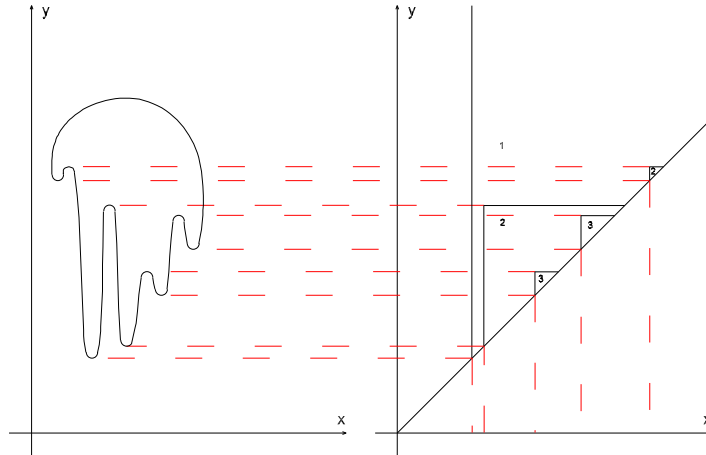


Figura 1.1: Esempio di funzione di taglia unidimensionale associata alla funzione misurante $\varphi(x, y) = y$.

Si vedono ora alcune proprietà utili delle funzioni di taglia, che verranno enunciate senza dimostrazione.

Proposizione 1.1.1. *Data la funzione di taglia $l_{(M,\varphi)} : \Delta^+ \rightarrow \mathbb{N}$ valgono le seguenti proprietà:*

1. $l_{(M,\varphi)}(x, y)$ è non-decrescente in x e non-crescente in y .
2. $l_{(M,\varphi)}(x, y) = 0$ per ogni $x < \min_{P \in M} \varphi(P)$.
3. $l_{(M,\varphi)}(x, y)$ è uguale al numero di componenti connesse per archi di M per ogni $x, y \geq \max_{P \in M} \varphi(P)$.

Vale inoltre il seguente teorema, utile per individuare i punti di discontinuità della funzione di taglia $l_{(M,\varphi)}$ nel caso in cui M sia una sottovarietà chiusa (ovvero compatta e con bordo vuoto) di un qualche spazio euclideo.

Teorema 1.1.2. *Si assume che la varietà M sia C^2 e che la funzione misurante φ sia C^1 . In questo caso, se (x, y) è un punto di discontinuità per la funzione di taglia $l_{(M, \varphi)}$, allora si ha che x oppure y o entrambi sono valori critici per φ .*

Date due funzioni di taglia riferite a due coppie di taglia (M, φ) e (N, ψ) è possibile confrontarle e determinare una distanza tra esse. Tale distanza risulta essere strettamente collegata con la distanza naturale di taglia tra classi di coppie di taglia. Questi argomenti non verranno spiegati all'interno di questa tesi in quanto non sono utilizzati nell'esempio trattato; per maggiori dettagli in questo ambito ci si rifà agli articoli [1], [2], [3].

1.2 Funzioni di taglia multidimensionali

Le funzioni di taglia multidimensionali sono l'estensione della nozione di funzione di taglia unidimensionale nel caso in cui la funzione misurante sia un'applicazione vettoriale $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, dove le funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono funzioni misuranti unidimensionali.

Si vedrà innanzitutto la definizione di funzione di taglia k -dimensionale e si studierà poi il metodo di riduzione al caso 1-dimensionale.

Sia M uno spazio topologico non vuoto, compatto, Hausdorff e localmente connesso e sia $\vec{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione continua, detta funzione misurante. La coppia (M, φ) è detta coppia di taglia.

Definizione 1.5. Si introducono le relazioni d'ordine parziale \preceq e \prec sui punti di \mathbb{R}^k . Siano $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, allora:

$$\vec{x} \preceq \vec{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, k$$

e, analogamente

$$\vec{x} \prec \vec{y} \Leftrightarrow x_i < y_i \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Definizione 1.6. Per ogni $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ si denota con $M(\vec{\varphi} \preceq \vec{x})$ l'insieme $\{P \in M \mid \varphi_i(P) \leq x_i, i = 1, \dots, k\}$.

Definizione 1.7. Per ogni k -upla $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, si dice che due punti $P, Q \in M$ sono $\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{x} \rangle$ -connessi se e solo se esiste un sottoinsieme connesso di $M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{x} \rangle$ che contenga entrambi P e Q .

Si considera ora l'insieme $\Delta^+ \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ definito da $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \mid \vec{x} \prec \vec{y}\}$. Definiamo ora la funzione di taglia k -dimensionale.

Definizione 1.8. Si chiama *funzione di taglia k -dimensionale* associata alla coppia di taglia $(M, \vec{\varphi})$ la funzione $l_{(M, \vec{\varphi})} : \Delta^+ \rightarrow \mathbb{N}$ che assegna alla coppia $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta^+$ il numero di classi di equivalenza in cui l'insieme $M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{x} \rangle$ è diviso dalla relazione di $\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{y} \rangle$ -connessione.

Osservazione 3. In altre parole, la funzione $l_{(M, \vec{\varphi})}(\vec{x}, \vec{y})$ conta il numero di componenti connesse di $M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{y} \rangle$ che contengono almeno un punto di $M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{x} \rangle$.

Lo studio delle funzioni di taglia k -dimensionali, a partire dalla loro definizione, presenta alcuni problemi legati soprattutto al fatto di dover lavorare in dimensione $2k$, il che risulta abbastanza complicato non appena k cresce un po'. Si vede quindi il metodo di riduzione delle funzioni di taglia k -dimensionali al caso 1-dimensionale, che permette di studiare più facilmente i risultati ottenuti, senza però perdere le informazioni derivanti dal fatto di avere funzioni k -dimensionali. Questa riduzione si ottiene suddividendo $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ in una famiglia parametrizzata di semipiani tali che la restrizione della funzione di taglia $l_{(M, \vec{\varphi})}$ su ognuno di essi possa essere vista come una particolare funzione di taglia unidimensionale.

Definizione 1.9. Siano $\vec{l}, \vec{b} \in \mathbb{R}^k$. Allora la coppia (\vec{l}, \vec{b}) è detta *ammissibile* se:

- i. \vec{l} è un vettore unitario con $l_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$.
- ii. \vec{b} è tale che $\sum_{i=1}^k b_i = 0$.

Si denota con Adm_k l'insieme delle coppie ammissibili di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

Data una coppia ammissibile (\vec{l}, \vec{b}) , si definisce il semipiano $\pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$ di

$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, detto *semipiano ammissibile*, con le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} \vec{x} = s \vec{l} + \vec{b} \\ \vec{y} = t \vec{l} + \vec{b} \end{cases}$$

con $s, t \in \mathbb{R}$ e $s < t$.

Proposizione 1.2.1. *Per ogni $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Delta^+$ esiste una ed una sola coppia ammissibile (\vec{l}, \vec{b}) tale che $(\vec{x}, \vec{y}) \in \pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$.*

Dimostrazione. Si prendono, per ogni $i = 1, \dots, k$:

$$l_i = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)^2}}, \quad b_i = \frac{x_i \sum_{j=1}^k y_j - y_i \sum_{j=1}^k x_j}{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)}.$$

Quindi il semipiano $\pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$ è dato dalle equazioni parametriche $\vec{x} = s \vec{l} + \vec{b}$, $\vec{y} = t \vec{l} + \vec{b}$, con:

$$s = \frac{\sum_{j=1}^k x_j}{\sum_{j=1}^k l_j} = \frac{\sum_{j=1}^k x_j \sqrt{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)^2}}{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)}$$

$$t = \frac{\sum_{j=1}^k y_j}{\sum_{j=1}^k l_j} = \frac{\sum_{j=1}^k y_j \sqrt{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)^2}}{\sum_{j=1}^k (y_j - x_j)}.$$

□

Si definisce ora una funzione misurante unidimensionale su ogni semipiano e si prova l'uguaglianza di tale funzione con la funzione misurante multidimensionale.

Teorema 1.2.2. *Sia (\vec{l}, \vec{b}) una coppia ammissibile e sia $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}}(P) = \max_{i=1, \dots, k} \left\{ \frac{\varphi_i(P) - b_i}{l_i} \right\}.$$

Allora, per ogni $(\vec{x}, \vec{y}) = (s \vec{l} + \vec{b}, t \vec{l} + \vec{b}) \in \pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$, vale la seguente uguaglianza:

$$l_{(M, \vec{\varphi})}(\vec{x}, \vec{y}) = l_{(M, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}})}(s, t).$$

Dimostrazione. Per ogni $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, con $x_i = sl_i + b_i$ per $i = 1, \dots, k$, si ha che $M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{x} \rangle = M\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}} \leq s \rangle$. Infatti

$$\begin{aligned} M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{x} \rangle &= \{P \in M \mid \varphi_i(P) \leq x_i, i = 1, \dots, k\} = \\ &= \{P \in M \mid \varphi_i(P) \leq sl_i + b_i, i = 1, \dots, k\} = \\ &= \left\{P \in M \mid \frac{\varphi_i(P) - b_i}{l_i} \leq s, i = 1, \dots, k\right\} = M\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}} \leq s \rangle. \end{aligned}$$

Si vede in modo analogo che, per ogni $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ con $y_i = tl_i + b_i$ per $i = 1, \dots, k$, vale che $M\langle \vec{\varphi} \preceq \vec{y} \rangle = M\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}} \leq t \rangle$. Così, dall'osservazione 3, si ottiene quanto voluto. □

Anche in questo caso è possibile determinare una distanza tra le funzioni di taglia, detta distanza di match, che risulta strettamente collegata con la distanza di match del caso multidimensionale. Si faccia riferimento agli articoli [1], [2], [3] per maggiori dettagli, in quanto questi metodi non sono utilizzati in questa tesi.

Capitolo 2

Gruppi di omologia e funzioni di Morse

Si vogliono dare, in questo capitolo, alcune nozioni che saranno utilizzate in seguito riguardanti i gruppi di omologia e le funzioni di Morse. Si considerano principalmente situazioni con varietà di dimensione al massimo due e si tralascia buona parte della teoria, dando solo i risultati essenziali e alcuni esempi che permettano di visualizzare quanto enunciato. Per una spiegazione completa si vedano [5] e [6] per quanto riguarda i gruppi di omologia e [4] per le funzioni di Morse.

2.1 Gruppi di omologia

Sia M una varietà chiusa e connessa. Si può triangolare la varietà M e presentarla come complesso simpliciale K . A tale complesso simpliciale si assegna un complesso di catene, ovvero una sequenza di gruppi abeliani con i relativi omomorfismi di bordo. Ad ogni indice n il gruppo abeliano $C_n(K)$ è generato da tutti i simplessi n -dimensionali del complesso simpliciale e l'omomorfismo di bordo $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ manda ogni simpleso n -dimensionale σ in una combinazione lineare di simplessi $(n-1)$ -dimensionali che siano sue facce. I coefficienti della combinazione lineare, detti coefficienti

di incidenza, derivano dalle orientazioni del simpleso di partenza e delle sue facce: se l'orientazione di una faccia δ coincide con l'orientazione indotta da σ su essa, allora il coefficiente di incidenza è $+1$, in caso contrario il coefficiente è -1 . A partire da tale complesso di catene si possono definire i gruppi di omologia di K : ad ogni grado n si ha $H_n(K) = \frac{Ker \partial_n}{Im \partial_{n+1}}$.

Si ricorda inoltre che, se ϕ è una mappa di catene tra due complessi di catene C e C' , induce omomorfismi ben definiti ϕ_* tra i rispettivi gruppi di omologia ad ogni grado n . Inoltre, se è data una mappa simpliciale f tra due complessi simpliciali K ed L , oppure un'approssimazione simpliciale di una mappa continua tra essi, allora f dà luogo ad una mappa ϕ tra i rispettivi complessi di catene $C(K)$ e $C(L)$ e gli omomorfismi indotti ϕ_* si denotano con f_* .

Si vedono ora alcune proprietà utili dei gruppi di omologia, prendendo in considerazione soprattutto casi in cui M è una varietà chiusa, connessa e orientabile di dimensione due e triangolata da un complesso simpliciale K .

Teorema 2.1.1. *I gruppi di omologia del punto sono i seguenti:*

$$H_n(*) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & n = 0 \end{cases}$$

Si osserva che, analogamente a quanto accade per il singolo punto, una varietà M di dimensione m ha gruppi di omologia $H_n(M)$ isomorfi a $\{0\}$ per ogni $n < 0$ e $n > m$. Questo segue direttamente dalla definizione di H_n : i gruppi C_n del complesso di catene associato ad una triangolazione K di M sono uguali a $\{0\}$ se $n < 0$ e $n > m$ poiché nel complesso simpliciale non ci sono simplessi di dimensioni minori di 0 o maggiori di m . A priori, invece, non si sa nulla sui gruppi di omologia $H_n(M)$ per $0 \leq n \leq m$. Inoltre si ha che il gruppo di omologia $H_0(M)$ è isomorfo alla somma diretta di j copie di \mathbb{Z} , dove j è il numero delle componenti connesse di M .

Definizione 2.1. Siano $f, g : X \rightarrow Y$ due applicazioni continue tra spazi topologici. Allora f e g sono dette *omotope*, $f \sim g$, se esiste una applicazione continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ per ogni $x \in X$.

Teorema 2.1.2. *Siano $f, g : K \rightarrow L$ applicazioni continue e omotope tra due complessi simpliciali che triangolano, rispettivamente, le varietà M ed N . Allora gli omomorfismi indotti $f_*, g_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$ coincidono per ogni n .*

Osservazione 4. Segue da questo teorema che, se esiste un'omotopia tra due spazi topologici X e Y , i gruppi di omologia di questi spazi sono isomorfi. In particolare, ogni spazio stellato, e quindi anche ogni spazio semplicemente connesso, ha gli stessi gruppi di omologia del punto.

Teorema 2.1.3. *Per ogni varietà chiusa e connessa M di dimensione n , il gruppo $H_n(M)$ è isomorfo a \mathbb{Z} se M è orientabile ed è isomorfo a $\{0\}$ altrimenti.*

Si considera ora una varietà chiusa e connessa M . È possibile presentare M non solo come complesso simpliciale K , ma anche come complesso cellulare U . Si associa al complesso cellulare U un complesso di catene dato da una sequenza di gruppi abeliani e di omomorfismi di bordo che sono definiti analogamente al caso simpliciale. La differenza sta nella presentazione della varietà M : utilizzando i complessi cellulari, generalmente, si ottengono presentazioni con meno elementi in ogni gruppo C_n , il che rende più semplici i calcoli. Vale però il seguente teorema:

Teorema 2.1.4. *Per ogni varietà presentata come complesso cellulare, i suoi gruppi di omologia cellulare coincidono con quelli di omologia simpliciale.*

Questo permette di scegliere, di volta in volta, di usare una o l'altra presentazione a seconda della comodità ed assicura che le proprietà viste per l'omologia simpliciale valgano anche per quella cellulare.

Si calcolano ora i gruppi di omologia in alcuni casi particolari che saranno utili in seguito.

- I gruppi di omologia della sfera S^n sono:

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in quanto ogni sfera ha una sola componente connessa, è orientabile e può essere presentata come complesso cellulare con un solo punto e una sola n -cella.

- I gruppi di omologia del disco D^n sono:

$$H_k(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

infatti ogni disco D^n è semplicemente connesso e quindi ha gli stessi gruppi di omologia del punto.

- I gruppi di omologia di uno spazio X dato da un wedge di n circonferenze sono:

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \bigoplus_n \mathbb{Z}, & k = 1 \\ \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

infatti lo spazio X può essere presentato, come complesso cellulare, con un solo punto e n 1-celle con il bordo sullo stesso punto. Intuitivamente, quindi, il gruppo H_1 conta il numero di buchi presenti nello spazio.

2.2 Funzioni di Morse

Sia M una superficie, cioè una varietà di dimensione due, e sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; in questa sezione consideriamo solo superficie lisce e funzioni di classe C^∞ . Inoltre si considerano funzioni riferite a sistemi di coordinate locali sulla superficie M , che saranno quindi funzioni in due variabili x e y . Tutta la teoria vale comunque per varietà di dimensioni maggiori e per funzioni in m variabili.

Si ricorda che un punto p_0 è critico per la funzione f se il gradiente di f si annulla in p_0 ; inoltre il punto p_0 è detto punto critico non degenere se il determinante della matrice hessiana in p_0 è diverso da zero, mentre è detto degenere se tale determinante è uguale a zero. Si ha che la proprietà di essere un punto critico degenere o non degenere è indipendente dalla scelta delle

coordinate, il che permette di usare parametrizzazioni locali della superficie attorno ad ogni punto critico. Vale poi che i punti critici non degeneri sono più stabili di quelli degeneri, cioè conservano alcune utili proprietà anche in seguito a piccole perturbazioni della funzione.

Si danno ora i tratti principali della teoria di Morse.

Teorema 2.2.1 (Lemma di Morse). *Sia p_0 un punto critico non degenero di una funzione f in due variabili. Allora si possono scegliere coordinate locali appropriate (X, Y) tali che la funzione f espressa in tali coordinate prenda una tra le forme seguenti:*

$$\begin{cases} i. & f = X^2 + Y^2 + c \\ ii. & f = X^2 - Y^2 + c \\ iii. & f = -X^2 - Y^2 + c \end{cases}$$

dove c è la costante $c = f(p_0)$ e $p_0 = (0, 0)$.

Corollario 2.2.2. *Un punto critico non degenero di una funzione f in due variabili è isolato.*

Definizione 2.2. Sia p_0 un punto critico non degenero di una funzione f in due variabili. Si può scegliere un sistema di coordinate (x, y) in un intorno del punto p_0 in modo tale che f sia espressa in una delle forme standard date dal teorema 2.2.1. Allora si dice che il punto critico non degenero p_0 di f ha indice 0, 1 oppure 2 se la funzione è espressa, rispettivamente, nella forma $f = x^2 + y^2 + c$, $f = x^2 - y^2 + c$ o $f = -x^2 - y^2 + c$. In altre parole, l'indice conta il numero di segni meno che compaiono nella forma standard di f attorno a p_0 .

Teorema 2.2.3. *Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uno spazio compatto X . Allora f prende il valore minimo in un qualche punto p_0 di X e il valore massimo in un qualche punto q_0 di X .*

Definizione 2.3. Si suppone che ogni punto critico della funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ su M sia non degenero. Allora f è detta *funzione di Morse*.

Lemma 2.2.4. *Una funzione di Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definita su una superficie chiusa M ha un numero finito di punti critici.*

Definizione 2.4. Si dice che un numero reale c_0 è un *valore critico* di f se f prende il valore c_0 in qualche punto critico p_0 , $f(p_0) = c_0$.

Si denoterà, in questa sezione, con M_t l'insieme $\{p \in M \mid f(p) \leq t\}$.

Lemma 2.2.5. *Siano $b, c \in \mathbb{R}$ con $b < c$ e tali che f non abbia valori critici nell'intervallo $[b, c]$. Allora M_b e M_c sono diffeomorfi.*

Si può vedere come cambia l'insieme M_t quando t varia da un valore inferiore al minimo della funzione sulla varietà ad un valore superiore al massimo di tale funzione, passando quindi per i vari valori critici di f .

Per ogni punto critico di f si può considerare la forma canonica della funzione in coordinate (X, Y) attorno a quel punto. Tale forma sarà una delle tre del teorema 2.2.1.

Se la funzione f viene portata nella forma $f = X^2 + Y^2 + c_0$, il punto p_0 ha indice 0, cioè è un punto di minimo per la funzione. Siano $c_0 = f(p_0)$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ piccolo, allora si vuole vedere il comportamento di M_t quando t varia nell'intervallo $[c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon]$. Quando t arriva al valore c_0 , nell'insieme M_t compare una nuova componente connessa diffeomorfa ad un disco D^2 . Questa situazione si può formalizzare con $M_{c_0+\varepsilon} \cong M_{c_0-\varepsilon} \sqcup D^2$, dove \sqcup indica l'unione disgiunta dei due insiemi.

Se il punto critico p_1 ha indice 1, la funzione f attorno a tale punto è espressa nella forma $f = X^2 - Y^2 + c_1$; il punto p_1 è un punto di sella. In questo caso, quando t arriva al valore $c_1 = f(p_1)$, due componenti connesse di $M_{c_1-\varepsilon}$ si uniscono nel punto p_1 . Intuitivamente ciò che è stato fatto è aggiungere un rettangolo, attaccato lungo due lati opposti, alle due componenti connesse da unire. Formalmente, questa situazione può essere espressa con

$$M_{c_1+\varepsilon} \cong M_{c_1-\varepsilon} \cup D^1 \times D^1.$$

Infine, se la funzione è nella forma $f = -X^2 - Y^2 + c_2$ attorno al punto p_2 di indice 2, allora questo è un massimo per la funzione. Quando t arriva al valore $c_2 = f(p_2)$, all'insieme $M_{c_2-\varepsilon}$ viene aggiunto un disco, differomorfo al disco

D^2 , che si incolla a $M_{c_2-\varepsilon}$ lungo il suo bordo. Così si ha $M_{c_2+\varepsilon} \cong M_{c_2-\varepsilon} \cup D^2$. Se si pensa alle rappresentazioni in \mathbb{R}^3 delle superfici $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 - y^2$ e $z = -x^2 - y^2$, l'origine è, rispettivamente, punto di minimo, di sella e di massimo per la funzione, e la situazione locale attorno all'origine è la stessa che si presenta attorno ad ogni punto critico di una funzione di Morse f definita su una superficie M .

Vale infine il seguente teorema:

Teorema 2.2.6. *Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse su M , e siano p_1, \dots, p_r i suoi punti critici. Allora esiste una funzione di Morse f' i cui punti critici siano p_1, \dots, p_r e tale che*

$$f'(p_i) \neq f'(p_j) \quad \forall i \neq j \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Inoltre, si può scegliere f' in modo tale che sia una (C^2, ε) -approssimazione di f , con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Capitolo 3

Caso particolare iniziale

Si vogliono ora utilizzare, per lo studio di un caso particolare, i metodi introdotti; ciò che viene esposto in questo capitolo è frutto del lavoro della dott.ssa Barbara Di Fabio.

Si considerano due varietà, la sfera S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il cubo C definito come bordo dell'insieme $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, $C = \partial Q$. Si sceglie poi la funzione misurante $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y, z) = |x|$. Con un abuso di notazione si indicheranno, qui come in seguito, sempre con φ le restrizioni di tale funzione alle varietà S e C .

Si studiano quindi le funzioni di taglia unidimensionali $l_{(S,\varphi)}$ e $l_{(C,\varphi)}$ e il primo e secondo gruppo di omologia di $S\langle\varphi \leq y\rangle$ e $C\langle\varphi \leq y\rangle$.

Si vede dapprima il caso della sfera. Si pensa, per visualizzare meglio la situazione, alla funzione misurante φ come ad una coppia di piani perpendicolari all'asse delle x che si muovono dalla posizione iniziale in $x = 0$ restando alla stessa distanza dall'origine. Quando la funzione φ assume il suo valore minimo 0, si ha subito una componente connessa per $S\langle\varphi \leq y\rangle$ data dalla circonferenza unitaria nel piano $x = 0$. La funzione di taglia $l_{(S,\varphi)}$ prende valore 1 non appena $x = 0$. Aumentando il valore della funzione φ si ha sempre una sola componente connessa che si allarga sulla sfera, diventando prima una striscia sulla sfera e poi, per $y = 1$, la sfera stessa. La funzione di taglia resta quindi sempre costante ed uguale a 1.

3. Caso particolare iniziale

Un comportamento analogo si ha per il cubo: per $\varphi = 0$ si ha una componente connessa data dal quadrato di lato 2, centrato nell'origine e appartenente al piano $x = 0$. Aumentando il valore della funzione misurante si ha una striscia sul cubo e, per $y = 1$ l'intero cubo. Anche in questo caso la funzione di taglia assumerà sempre lo stesso valore 1.

I grafici delle due funzioni di taglia saranno quindi identici e saranno il grafico in figura 3.1.

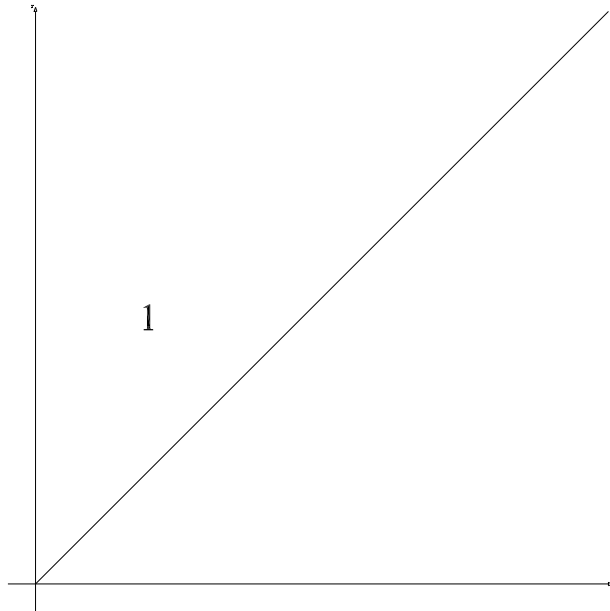


Figura 3.1: Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata ad entrambe le coppie di taglia (S, φ) e (C, φ) .

Anche i gruppi di omologia non permettono di distinguere le due varietà. I gruppi di omologia $H_1(S\langle\varphi \leq y\rangle)$ e $H_1(C\langle\varphi \leq y\rangle)$ sono isomorfi a \mathbb{Z} per $y = 0$ e la situazione non varia finché si ha $y < 1$. Per tale intervallo di y , infatti, gli spazi $S\langle\varphi \leq y\rangle$ e $C\langle\varphi \leq y\rangle$ possono essere portati tramite omotopia in una circonferenza S^1 . Quando $y = 1$ i gruppi di omologia di grado 1 diventano entrambi isomorfi a $\{0\}$, infatti si chiude il buco nei punti $(1; 0; 0)$ e

$(-1; 0; 0)$ sulla sfera e nelle facce $\{1\} \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ e $\{-1\} \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ sul cubo. Da questo momento in poi i gruppi $H_1(S\langle\varphi \leq y\rangle)$ e $H_1(C\langle\varphi \leq y\rangle)$ non variano più.

Entrambi i gruppi di omologia di grado 2, invece, sono inizialmente isomorfi a $\{0\}$ e diventano isomorfi a \mathbb{Z} quando $y = 1$, cioè quando $S\langle\varphi \leq y\rangle$ e $C\langle\varphi \leq y\rangle$ sono rispettivamente l'intera sfera e l'intero cubo, per il teorema 2.1.3. In seguito non si hanno altri cambiamenti.

Si è visto così che utilizzando la funzione misurante unidimensionale $|x|$ non si riesce ad ottenere una distinzione delle due varietà S e C nè utilizzando le funzioni di taglia, nè attraverso i gruppi di omologia. Per questo motivo si studia lo stesso problema utilizzando una funzione misurante multidimensionale.

3.1 Caso multidimensionale

Si considera ora la funzione misurante $\vec{\Psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con

$$\vec{\Psi}(x, y, z) = (\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = (|x|, |z|).$$

Utilizzando il metodo di riduzione della funzione di taglia multidimensionale al caso unidimensionale, si studia la foliazione in semipiani $\pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$, scegliendo $\vec{l} = (\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ e $\vec{b} = (a; -a)$ con $a \in \mathbb{R}$. Si vede immediatamente che \vec{l} e \vec{b} soddisfano le condizioni richieste dalla definizione. Così, ogni semipiano della foliazione sarà definito da

$$\begin{cases} x_1 = s \cos \theta + a \\ x_2 = s \sin \theta - a \\ y_1 = t \cos \theta + a \\ y_2 = t \sin \theta - a \end{cases}$$

con $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$.

Si considera ora un singolo semipiano della foliazione, scegliendo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $a = 0$. I vettori \vec{l} e \vec{b} saranno quindi $\vec{l} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\vec{b} = (0, 0)$. La

funzione misurante unidimensionale $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}}$ che si ottiene con queste scelte è

$$F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}}(P) = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\psi_i(P)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right\} = \sqrt{2} \max \{|x|, |z|\}.$$

Ora, per il teorema 1.2.2 si avrà che

$$\begin{aligned} l_{(S, \vec{\Psi})}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= l_{(S, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})}(s, t) \\ l_{(C, \vec{\Psi})}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= l_{(C, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})}(s, t) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} H_i(S\langle \vec{\Psi} \preceq \vec{y} \rangle) &= H_i(S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle) \\ H_i(C\langle \vec{\Psi} \preceq \vec{y} \rangle) &= H_i(C\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle) \end{aligned}$$

per $i = 1, 2$.

Si calcolano ora le funzioni di taglia e i gruppi di omologia associati alle coppie $(S, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})$ e $(C, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})$ per ottenere informazioni che permettano di distinguere le due varietà considerate.

Dato che la funzione misurante $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}}$ prende il valore massimo tra $|x|$ e $|z|$ moltiplicato per la costante $\sqrt{2}$, si fanno variare entrambe le funzioni ψ_1 e ψ_2 allo stesso modo, così da avere situazioni più facilmente visualizzabili e che permettano di calcolare più semplicemente il valore della funzione di taglia. Intuitivamente, si hanno due coppie di piani, una perpendicolare all'asse delle x e l'altra perpendicolare all'asse delle z , che si spostano dalle posizioni iniziali $x = 0$ e $z = 0$ in modo tale che tutti i piani siano sempre alla stessa distanza dall'origine.

Si analizza per primo il comportamento sul cubo C .

Quando $\psi_1 = \psi_2 = 0$ si hanno due piani perpendicolari la cui intersezione è l'asse delle y . Così, per $t = 0$ si hanno due componenti connesse per $C\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$ che sono i punti $(0; 1; 0)$ e $(0; -1; 0)$ e per $s = 0$ la funzione di taglia prende valore 2. Aumentando il valore della funzione misurante si hanno sempre due componenti connesse che sono dei quadrati che si allargano sulle facce del cubo perpendicolari all'asse delle y . La situazione cambia solo nel momento in cui $|x| = |z| = 1$, ovvero per $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} = \sqrt{2}$, quando i piani che

rappresentano le funzioni misuranti arrivano ognuno su una diversa faccia del cubo: da questo momento, infatti, $C\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$ è l'intero cubo, quindi è formato da una sola componente connessa. Il grafico della funzione di taglia $l_{(C, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})}$ si può vedere in figura 3.2.

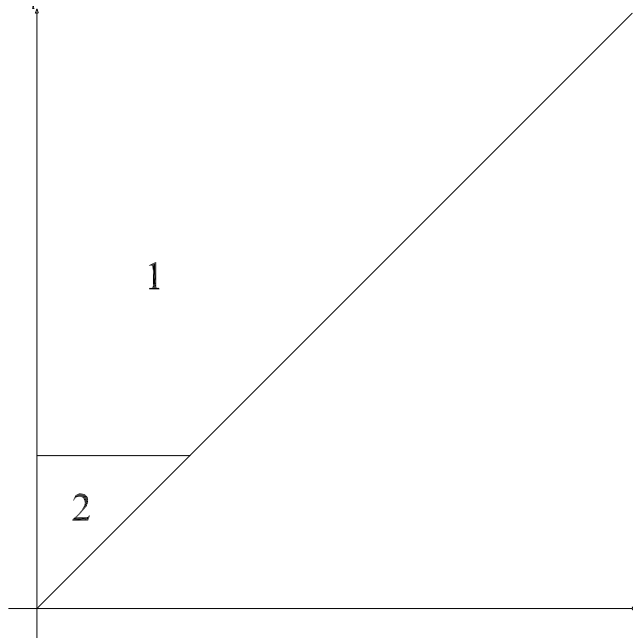


Figura 3.2: Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia $(C, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})$.

Per quanto riguarda i gruppi di omologia si ha che $H_1(C\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle)$ resta sempre invariato e isomorfo a $\{0\}$, mentre il gruppo di omologia $H_2(C\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle)$, inizialmente isomorfo a $\{0\}$, diventa isomorfo a \mathbb{Z} quando $t = \sqrt{2}$, cioè da quando $C\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$ è tutto il cubo.

Si vede ora il comportamento sulla sfera.

Per $t = 0$ si hanno, come nel caso precedente, due componenti connesse per $S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$ date dai punti $(0; 1; 0)$ e $(0; -1; 0)$, quindi per $s = 0$ la funzione di taglia $l_{(S, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})}$ prende valore 2. Aumentando il valore delle

funzioni misuranti ψ_1 e ψ_2 , si hanno due calotte che si allargano sulla sfera e quindi il valore della funzione di taglia resta invariato. La situazione cambia, invece, quando $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} = 1$, che corrisponde a $|x| = |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per tale valore, infatti, le due componenti connesse si congiungono in quattro punti del piano $y = 0$, che corrispondono alle possibili combinazioni di $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Da questo momento in poi si ha una sola componente connessa per $S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$ e la funzione di taglia resta costante e uguale a 1. Si può quindi vedere, in figura 3.3, il grafico di $l_{(S, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})}$.

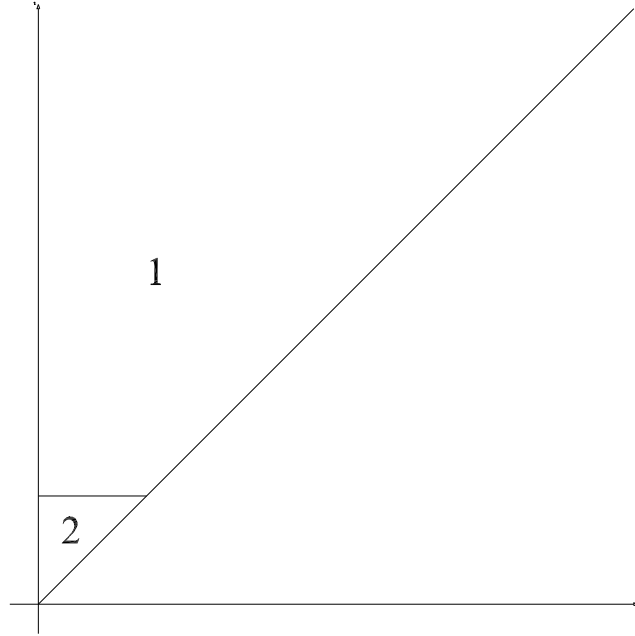


Figura 3.3: Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia $(S, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})$.

Si possono poi ottenere informazioni aggiuntive dai gruppi di omologia di $S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$.

Il secondo gruppo di omologia inizialmente è isomorfo a $\{0\}$ e diventa isomorfo a \mathbb{Z} quando tutta la sfera appartiene a $S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$, il che avviene quando $t = \sqrt{2}$ come per il cubo.

Dal gruppo di omologia di grado 1, invece, si hanno informazioni che permettono di distinguere le due varietà. $H_1(S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle)$, infatti, è inizialmente isomorfo a $\{0\}$ come accade per il cubo, ma quando $t = 1$ varia e diventa isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Lo spazio $S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle$ infatti, può essere portato nel wedge di tre circonferenze nel seguente modo: le due componenti connesse che si sono allargate sulla sfera possono essere collassate ognuna in un punto e i due punti così ottenuti possono essere uniti collassando a un punto uno dei quattro segmenti che ha unito le componenti connesse. Ogni volta che, nel seguito, si calcherà il gruppo di omologia H_1 , si pensi di compiere le stesse trasformazioni per portare lo spazio che si sta studiando nel wedge di un certo numero di circonferenze. Infine, il gruppo $H_1(S\langle F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}} \leq t \rangle)$ varia solo nel momento in cui $t = \sqrt{2}$ quando torna ad essere isomorfo a $\{0\}$; in seguito non si hanno più variazioni.

3.2 Alcune osservazioni

L'esempio appena visto presenta alcuni problemi e aspetti da migliorare e lo scopo di questa tesi è analizzarli e trovare, se possibile, una soluzione.

Innanzitutto, la funzione misurante considerata, cioè il valore assoluto, è una funzione continua ma non C^1 . Si cerca quindi una funzione che sia, preferibilmente, almeno C^2 . Inoltre è utile avere una funzione misurante che sia di Morse, il che permette, come si è visto nel capitolo precedente, di avere punti critici isolati. Al contrario, con il valore assoluto in vari casi si aveva un'infinità di punti critici per uno stesso valore della funzione (ad esempio, nel caso del cubo, si ha il valore massimo $|x| = 1$ in tutti i punti che appartengono a due facce opposte del cubo e questi sono tutti punti critici per la funzione considerata). Un altro vantaggio che deriva dall'usare funzioni di Morse è che, al massimo modificando un po' la funzione, si riescono ad avere anche valori critici tutti distinti per la funzione. Questo fa sì che i livelli in cui cambia il valore della funzione di taglia siano tutti distinti e quindi non si avranno situazioni, come succedeva nell'esempio appena visto, in cui dal

valore 0 la funzione di taglia passi direttamente al valore 2.

Si cerca anche di ottenere una migliore distinzione tra le due varietà considerate. I grafici delle funzioni di taglia multidimensionali associate alla funzione $(|x|, |z|)$, infatti, differiscono solo per il livello t in cui cambia il valore della funzione di taglia; se li si osserva come appaiono nelle figure 3.2 e 3.3, cioè senza che siano scritti i valori di riferimento sugli assi, non si riescono ad ottenere informazioni utili a distinguere le due varietà. La distinzione migliore che si è ottenuta è attraverso il primo gruppo di omologia, che però è più complesso (e meno intuitivo) da calcolare rispetto alla funzione di taglia. Si cerca quindi, per quanto possibile, di trovare funzioni misuranti tali che le funzioni di taglia ad esse associate abbiano grafici qualitativamente diversi, cioè che si possano distinguere anche senza riferimenti ai valori particolari sugli assi. Nello specifico si cerca, se possibile, di trovare una funzione misurante per cui la funzione di taglia unidimensionale ad essa associata non permetta di distinguere efficacemente le varietà S e C , mentre la funzione di taglia multidimensionale ad essa associata dia informazioni valide per la distinzione dei due oggetti. Si vuole inoltre una funzione misurante unidimensionale che sia il più possibile simile alla funzione valore assoluto di x , così la funzione multidimensionale sarà una coppia di funzioni ottenute apportando le stesse modifiche rispettivamente a $|x|$ e $|z|$. Si vedranno nel prossimo capitolo i risultati finora ottenuti.

Capitolo 4

Modifiche alla costruzione iniziale

Si vuole ora modificare l'esempio appena visto in modo da utilizzare funzioni di Morse come funzioni misuranti ed avere punti critici e valori critici isolati. Si cerca inoltre di ottenere una distinzione qualitativa, anziché solo quantitativa, dei due oggetti, tramite funzioni di taglia unidimensionali oppure multidimensionali.

Quanto esposto in questo capitolo, a parte la scelta delle funzioni misuranti, è la spiegazione del lavoro che ho svolto per questa tesi. Come si vedrà dai risultati ottenuti, non si è riusciti, almeno per ora, a trovare una funzione che non permetta di distinguere le varietà se associata a una funzione di taglia unidimensionale, ma che dia una buona distinzione nel caso multidimensionale.

4.1 Variazione analizzata

Si considera la funzione misurante $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f = \frac{1}{100}[100(x - 0,01)^2 + (y - 0,01)^2 + 11(z - 0,01)^2].$$

Si è arrivati a scegliere questa funzione per variare il meno possibile il valore assoluto $|x|$ e, allo stesso tempo, risolvere i problemi precedentemente analizzati. Dapprima è stata considerata la funzione x^2 , che risolveva i problemi

di non derivabilità del valore assoluto, ma non permetteva di isolare i punti critici. Sono state quindi aggiunte le componenti in y e z fino ad ottenere la funzione $x^2 + \frac{1}{100}y^2 + \frac{11}{100}z^2$. Ponendo $x^2 + \frac{1}{100}y^2 + \frac{11}{100}z^2 = k$, con $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, si ha, per i vari livelli di k un ellissoide con i tre semiassi diversi per evitare di avere intere circonferenze di punti critici. Infine, si è scelto di traslare il centro di tale ellissoide in tutte e tre le componenti per evitare che si presentassero coppie di punti critici per uno stesso valore della funzione, come succedeva precedentemente a causa della simmetria della funzione.

Si vede ora il comportamento della funzione di taglia rispetto alla funzione f sulla sfera, facendo variare la funzione misurante dal valore iniziale 0. Per $f = 0$ si ha il punto $(0, 01; 0, 01; 0, 01)$ contenuto all'interno della sfera. Facendo aumentare il valore di f , si ha un ellissoide che cresce all'interno della sfera.

Il primo punto critico si ha quando f vale 0,00979902: per tale valore, infatti, l'ellissoide interseca la superficie della sfera nel punto $(0, 01; 0, 99989999; 0, 01)$ e si crea una prima componente connessa per $S\langle f \leq y \rangle$.

La funzione di taglia $l_{(S,f)}(x, y)$, pertanto, assume sempre il valore 0 finché si ha $y < 0,00979902$ e la retta d'angolo si ha per $x = 0,00979902$.

Una seconda componente connessa si forma, quando $f = 0,01019898$, nel punto $(0, 01; -0, 99989999; 0, 01)$; entrambe le componenti si allargano sulla superficie della sfera all'aumentare del valore della funzione misurante f .

Quando si arriva ad $f = 0,10778922$ le due componenti connesse si congiungono nel punto $(0, 01; 0, 01; 0, 99989999)$; da questo momento in avanti si ha una sola componente connessa. La figura 4.1 permette di vedere un'immagine della situazione per questo valore della funzione misurante.

Aumentando ancora il valore della funzione misurante variano i gruppi di omologia $H_1(S\langle f \leq y \rangle)$ e $H_2(S\langle f \leq y \rangle)$, che inizialmente sono entrambi isomorfi a $\{0\}$.

Quando $y = 0,11218878$ le due estremità della componente connessa di $S\langle f \leq y \rangle$ si congiungono nel punto $(0, 01; 0, 01; -0, 99989999)$. Si forma così

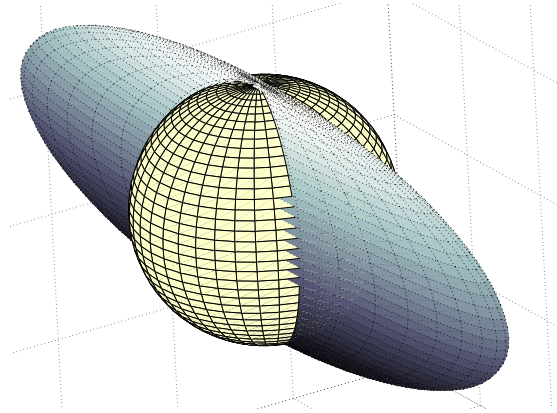


Figura 4.1: Immagine della sfera e dell'ellissoide per $f = 0,10778922$.

un buco, e si ha che $H_1(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \mathbb{Z}$.

Quando poi $y = 0,97990199$, si ha nuovamente $H_1(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \{0\}$, poiché la componente connessa ha toccato il punto $(0,99989999; 0,01; 0,01)$ chiudendo il buco precedentemente formatosi e da questo momento in poi il gruppo $H_1(S\langle f \leq y \rangle)$ non varia più. Si può vedere, in figura 4.2, la situazione quando f è di poco inferiore a $0,97990199$.

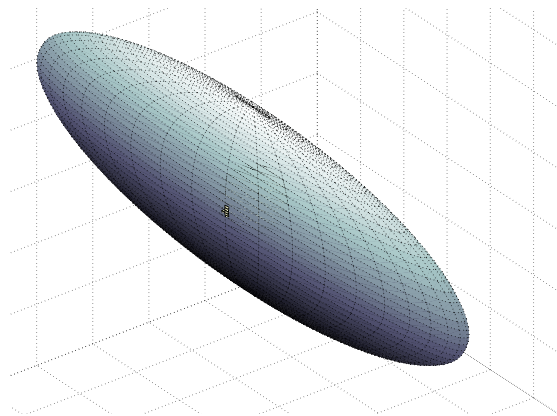


Figura 4.2: Immagine della sfera e dell'ellissoide per f di poco inferiore a $0,97990199$. La parte in giallo è un intorno del punto $(0,99989999; 0,01; 0,01)$ della sfera, dove si chiuderà il buco.

Infine, per $y \geq 1,01989799$, si ha $H_2(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \mathbb{Z}$ poiché la sfera è tutta contenuta all'interno dell'ellissoide.

Si traccia quindi il grafico della funzione di taglia $l_{(S,f)}(x, y)$, che si può vedere in figura 4.3.

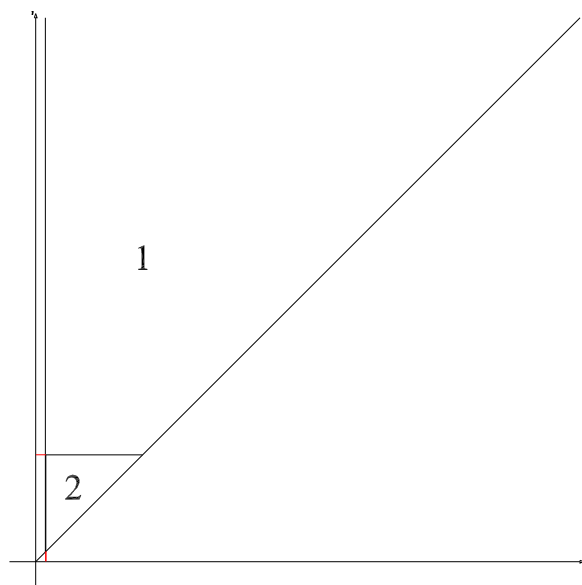


Figura 4.3: Funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia di taglia (S, f) . Si osserva che la seconda componente connessa si crea a poca distanza dalla prima ed è difficile distinguere le linee che si riferiscono a tali valori nel grafico della funzione di taglia.

Si riassumono i comportamenti dei gruppi di omologia di grado 1 e 2:

$H_1(S\langle f \leq y \rangle)$	
$0 \leq y < 0,11218878$	$H_1(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \{0\}$
$0,11218878 \leq y < 0,97990199$	$H_1(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \mathbb{Z}$
$y \geq 0,97990199$	$H_1(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \{0\}$

$H_2(S\langle f \leq y \rangle)$	
$0 \leq y < 1,01989799$	$H_2(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \{0\}$
$y \geq 1,01989799$	$H_2(S\langle f \leq y \rangle) \simeq \mathbb{Z}$

Si analizza ora il comportamento della funzione misurante f sul cubo. Quando $f = 0$ si ha, come nel caso precedente, il punto $(0, 01; 0, 01; 0, 01)$ all'interno del cubo. Facendo crescere il valore della funzione misurante si vede che la prima intersezione con il cubo si ha nel punto $(0, 01; 1; 0, 01)$ quando $f = 0,009801$; per $y = 0,009801$ quindi, si crea una prima componente connessa di $C\langle f \leq y \rangle$.

Aumentando il valore di f si creano altre tre componenti connesse, tutte su facce diverse del cubo e per valori diversi della funzione misurante, come si vede dalla tabella seguente:

Valore di f	Nuovo punto d'intersezione
$f = 0,009801$	$(0, 01; 1; 0, 01)$
$f = 0,010201$	$(0, 01; -1; 0, 01)$
$f = 0,107811$	$(0, 01; 0, 01; 1)$
$f = 0,112211$	$(0, 01; 0, 01; -1)$

Facendo crescere ancora il valore della funzione misurante, le quattro componenti connesse si ingrandiscono sulle facce del cubo. Quando si ha $f = 0,117612$ la prima e la terza componente connessa si congiungono, su uno spigolo del cubo, nel punto di coordinate $(0, 01; 1; 1)$. Si può vedere la situazione per questo valore di f in figura 4.4.

Una situazione analoga si crea quando $f = 0,118012$ e per $f = 0,122012$: nel primo caso si congiungono la seconda e la terza componente connessa nel punto $(0, 01; -1; 1)$ e nel secondo caso si uniscono la prima e la quarta componente connessa nel punto $(0, 01; 1; -1)$.

Si è arrivati, quindi, ad avere una sola componente connessa.

Le due estremità di tale componente connessa si incontrano, quando $f = 0,124311$, nel punto $(0, 01; -1; -1)$. Quando y prende questo valore si forma un buco e il gruppo di omologia $H_1(C\langle f \leq y \rangle)$, inizialmente isomorfo

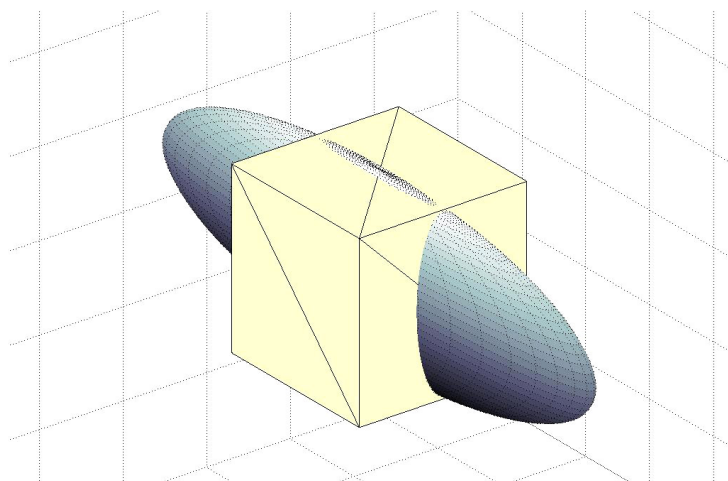


Figura 4.4: Immagine del cubo e dell'ellissoide per $f = 0,117612$. Si noti il punto di contatto delle due componenti connesse in $(0,01; 1; 1)$.

a $\{0\}$, diventa isomorfo a \mathbb{Z} . Si vede un'immagine dal basso, in figura 4.5 del cubo e dell'ellissoide quando f ha un valore di poco maggiore di $0,124311$.

Quando poi la funzione misurante assume il valore $0,9801$, si crea una seconda componente connessa nel punto $(1; 0,01; 0,01)$. Aumentando il valore della funzione f tale componente connessa cresce sulla faccia del cubo e si congiunge con la componente connessa iniziale nel punto $(1; 1; 0,01)$ per $f = 0,989901$.

Facendo crescere ancora la funzione misurante, la seconda componente connessa si congiunge con la prima anche nel punto $(1; -1; 0,01)$ per $f = 0,9922$, formando così un altro buco. Si ha quindi che $H_1(C\langle f \leq y \rangle) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ per $y = 0,9922$. Si ha un'immagine di questa situazione in figura 4.6.

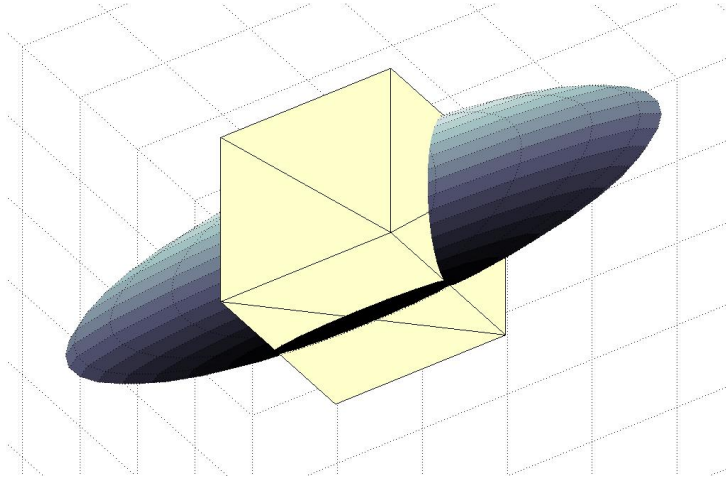


Figura 4.5: Immagine del cubo e dell'ellissoide per f di poco maggiore di $0,124311$.

Allo stesso modo, per $f = 1,0201$ si crea una componente connessa nel punto $(-1; 0,01; 0,01)$ che si collega all'altra quando $f = 1,029901$ nel punto $(-1; 1; 0,01)$.

Quando poi $f = 1,030301$ la componente connessa si congiunge anche nel punto $(-1; -1; 0,01)$ e si ha che $H_1(C\langle f \leq y \rangle) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ quando $y = 1,030301$.

Al crescere della funzione f non varia più il numero delle componenti connesse, ma solo i gruppi di omologia $H_1(C\langle f \leq y \rangle)$ e $H_2(C\langle f \leq y \rangle)$. Ogni volta che due estremità della componente connessa si congiungono su uno spigolo del cubo si crea un nuovo buco e ogni volta che l'ellissoide arriva a toccare un vertice del cubo si chiude un buco. Si può quindi vedere il comportamento

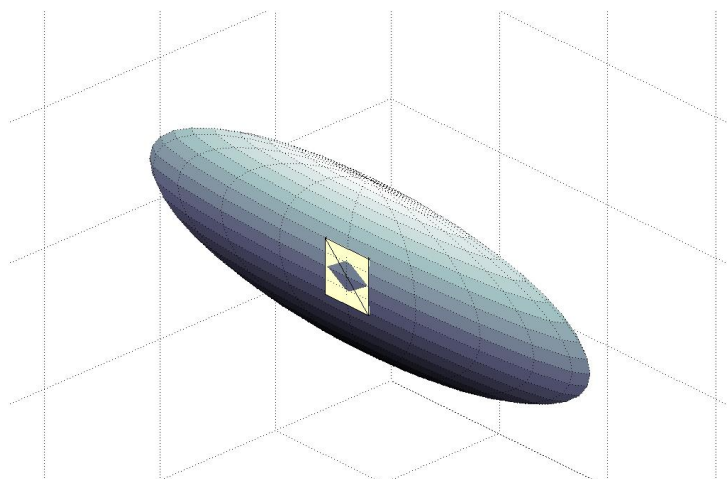


Figura 4.6: Immagine del cubo e dell'ellissoide per $f = 0,9922$.

del gruppo $H_1(C\langle f \leq y \rangle)$ nella tabella seguente:

Valore di y	Punto critico	Gruppo $H_1(C\langle f \leq y \rangle)$
$y = 1,087911$	$(1; 0,01; 1)$	$H_1 \simeq \bigoplus_4 \mathbb{Z}$
$y = 1,092311$	$(1; 0,01; -1)$	$H_1 \simeq \bigoplus_5 \mathbb{Z}$
$y = 1,097712$	$(1; 1; 1)$	$H_1 \simeq \bigoplus_4 \mathbb{Z}$
$y = 1,098112$	$(1; -1; 1)$	$H_1 \simeq \bigoplus_3 \mathbb{Z}$
$y = 1,102112$	$(1; 1; -1)$	$H_1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$y = 1,102512$	$(1; -1; -1)$	$H_1 \simeq \mathbb{Z}$
$y = 1,127911$	$(-1; 0,01; 1)$	$H_1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$y = 1,132311$	$(-1; 0,01; -1)$	$H_1 \simeq \bigoplus_3 \mathbb{Z}$
$y = 1,137712$	$(-1; 1; 1)$	$H_1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$y = 1,138112$	$(-1; -1; 1)$	$H_1 \simeq \mathbb{Z}$
$y \geq 1,142112$	$(-1; 1; -1)$	$H_1 \simeq \{0\}$

Il gruppo di omologia $H_2(C\langle f \leq y \rangle)$, inizialmente isomorfo a $\{0\}$, diventa isomorfo a \mathbb{Z} quando $y = 1,142512$, cioè quando il cubo è tutto contenuto all'interno dell'ellissoide. In seguito non si hanno più variazioni. Si può quindi vedere, nelle figure 4.7 e 4.8, il grafico della funzione di taglia $l_{(C,f)}(x, y)$.

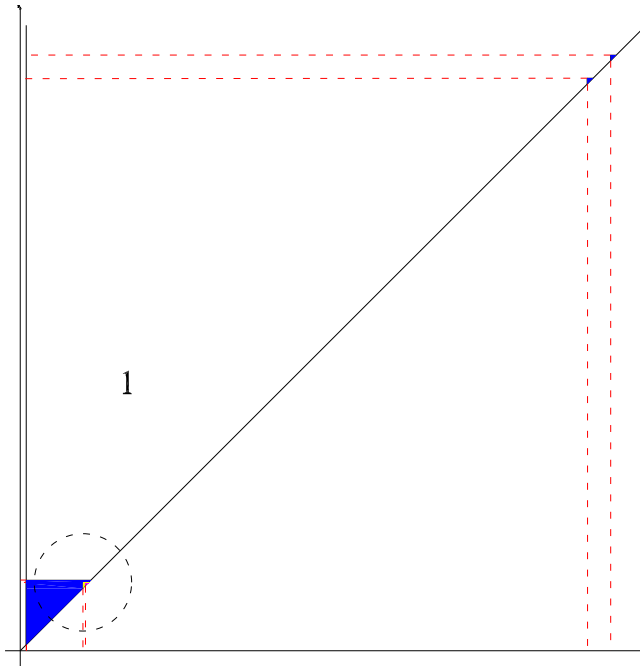


Figura 4.7: Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia di taglia (C, f) . Il grafico è stato colorato per evidenziare meglio le regioni in cui si hanno valori diversi per la funzione di taglia: il blu quando si hanno 2 componenti connesse, il giallo quando se ne hanno 3 e il rosso quando se ne hanno 4. La circonferenza tratteggiata serve per confrontare questo grafico con il suo ingrandimento in figura 4.8.

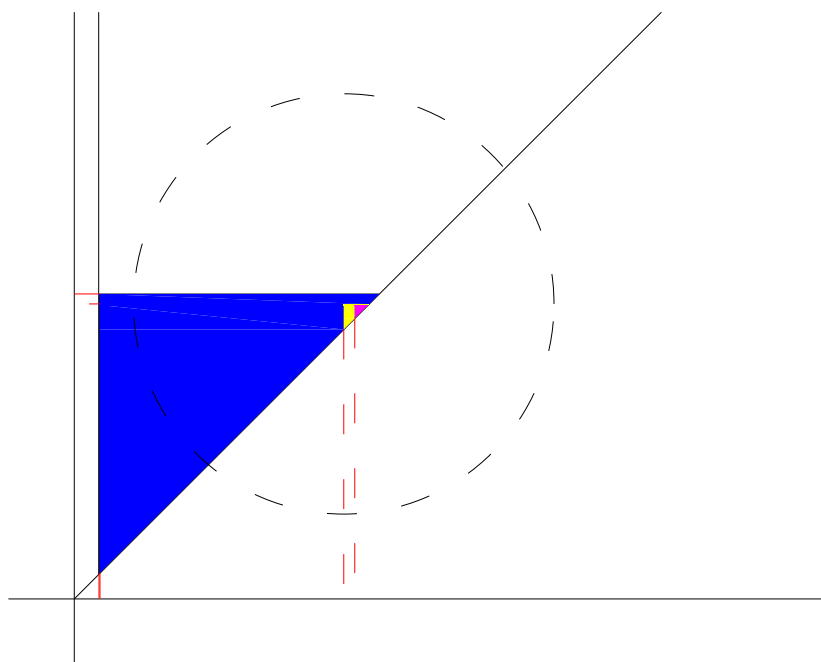


Figura 4.8: Ingrandimento di una parte del grafico della funzione di taglia in figura 4.7. I colori sono assegnati per distinguere i vari valori assunti dalla funzione come nel caso precedente.

Confrontando i due grafici in figura 4.7 e 4.8, si vede che la funzione di taglia unidimensionale associata alla funzione misurante f permette già di distinguere le due varietà, anche se le differenze sono lievi. D'altra parte, se si considera anche il primo gruppo di omologia si riescono a differenziare in maniera molto forte il cubo e la sfera.

4.2 Altra possibilità

Si vogliono ora considerare altre funzioni misuranti, cercandone una per cui la funzione di taglia unidimensionale ad essa associata non permetta di distinguere il cubo e la sfera, mentre con la funzione di taglia bidimensionale si ottenga una distinzione qualitativa delle due varietà. Si cerca inoltre, per

quanto possibile, di considerare funzioni che si avvicinino al valore assoluto, che ha un comportamento molto simile a quello desiderato.

Si considera ora la funzione misurante $g = x^2 + 2x + 2y + z$, facendola variare su \mathbb{R} . Questa può essere rappresentata con un cilindro parabolico, cioè una superficie con sezioni paraboliche nei piani (x, y) , con asse inclinato nel piano (y, z) e non simmetrica rispetto al piano $x = 0$. Queste caratteristiche permettono di evitare che si presentino più punti critici per uno stesso valore della funzione a causa della simmetria degli oggetti considerati.

Il comportamento della funzione di taglia unidimensionale associata alla funzione g rispetto al cubo e alla sfera è molto simile: in entrambi i casi si genera una componente connessa quando il cilindro parabolico tocca l'oggetto in un primo punto e la situazione non varia al crescere del valore della funzione. L'unica differenza deriva dal valore di g in cui si genera tale componente connessa. Analogamente, anche i gruppi di omologia di grado 1 e 2 non danno informazioni che differenzino in modo efficace i due oggetti: il primo gruppo di omologia è sempre isomorfo a $\{0\}$ in entrambi i casi, mentre il secondo diventa isomorfo a \mathbb{Z} sia per il cubo che per la sfera quando il cilindro si stacca dall'ultimo punto dell'oggetto considerato, cosa che accade per due valori diversi della funzione g .

Per studiare il caso bidimensionale si considerano le funzioni

$g_1 = x^2 + 2x + 2y + z$ e $g_2 = 2x + y^2 - 2y + z$, dove g_2 ha caratteristiche analoghe a quelle di g_1 .

Capitolo 5

Conclusioni

Lo studio effettuato, spiegato nel capitolo precedente, non ha permesso di trovare una funzione misurante con punti critici e valori critici distinti che non dia una distinzione valida nel caso unidimensionale, ma la fornisca in quello multidimensionale.

La funzione $f = \frac{1}{100}[100(x - 0,01)^2 + (y - 0,01)^2 + 11(z - 0,01)^2]$, infatti, dà buone informazioni per distinguere le varietà S e C utilizzando solamente funzioni di taglia unidimensionali. Nel secondo caso, invece, si è visto che le funzioni di taglia unidimensionali danno una distinzione solamente quantitativa delle due varietà.

Questa differenza, probabilmente, deriva dalle diverse modifiche apportate alla funzione $|x|$ per ottenere le funzioni f e g . Nel primo caso, infatti, sono state apportate modifiche rilevanti in tutte e tre le componenti x , y e z , soprattutto per poter isolare i punti critici e i valori critici. La funzione g , invece, ha un comportamento più vicino al valore assoluto di x , anche perché le variabili y e z compaiono solo linearmente.

Resta quindi aperto il problema di trovare una funzione misurante che non dia informazioni sufficienti per distinguere le varietà S e C nel caso unidimensionale, ma che permetta la distinzione nel caso multidimensionale.

Altri casi da studiare possono essere quelli in cui si prendono, come componenti della funzione di taglia multidimensionale, due funzioni unidimen-

5. Conclusioni

sionali completamente diverse, come ad esempio la funzione g_1 e la funzione distanza dall'origine opportunamente odificata (in quanto non ha valori critici isolati sulle due varietà).

Un'altra possibilità, infine, è data dall'utilizzare funzioni che non siano centrate in un punto interno alle varietà (com'era per la funzione f), ma in un punto esterno.

Elenco delle figure

1.1	Esempio di funzione di taglia unidimensionale associata alla funzione misurante $\varphi(x, y) = y$	3
3.1	Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata ad entrambe le coppie di taglia (S, φ) e (C, φ)	18
3.2	Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia $(C, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})$	21
3.3	Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia $(S, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\Psi}})$	22
4.1	Immagine della sfera e dell'ellissoide per $f = 0, 10778922$	27
4.2	Immagine della sfera e dell'ellissoide per f di poco inferiore a $0, 97990199$. La parte in giallo è un intorno del punto $(0, 99989999; 0, 01; 0, 01)$ della sfera, dove si chiuderà il buco.	27
4.3	Funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia di taglia (S, f) . Si osserva che la seconda componente conessa si crea a poca distanza dalla prima ed è difficile distinguere le linee che si riferiscono a tali valori nel grafico della funzione di taglia.	28
4.4	Immagine del cubo e dell'ellissoide per $f = 0, 117612$. Si noti il punto di contatto delle due componenti connesse in $(0, 01; 1; 1)$	30
4.5	Immagine del cubo e dell'ellissoide per f di poco maggiore di $0, 124311$	31
4.6	Immagine del cubo e dell'ellissoide per $f = 0, 9922$	32

- 4.7 Grafico della funzione di taglia unidimensionale associata alla coppia di taglia (C, f) . Il grafico è stato colorato per evidenziare meglio le regioni in cui si hanno valori diversi per la funzione di taglia: il blu quando si hanno 2 componenti connesse, il giallo quando se ne hanno 3 e il rosso quando se ne hanno 4. La circonferenza tratteggiata serve per confrontare questo grafico con il suo ingrandimento in figura 4.8. 33
- 4.8 Ingrandimento di una parte del grafico della funzione di taglia in figura 4.7. I colori sono assegnati per distinguere i vari valori assunti dalla funzione come nel caso precedente. 34

Bibliografia

- [1] A. Cerri, P. Frosini, C. Landi, *Stability in Multidimensional Size Theory*, Agosto 2006.
- [2] P. Frosini, S. Biasotti, A. Cerri, D. Giorgi, C. Landi, *Multidimensional Size Functions for Shape Comparison*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Maggio 2007.
- [3] P. Frosini, C. Landi, *Size Theory as a Topological Tool for Computer Vision*
- [4] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society, 2002.
- [5] S. V. Matveev, *Lectures on Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2006.
- [6] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, 1996.

Ringraziamenti

Credo che questa, almeno da certi punti di vista, sia la parte più complicata di tutta la tesi, se non altro perché la maggior parte delle persone leggerà solo queste due pagine. Chiedo da subito scusa se dimenticherò di citare qualcuno, vi assicuro che non è fatto volontariamente.

Ringrazio innanzitutto il prof. Massimo Ferri e la dott.ssa Barbara Di Fabio per avermi proposto questa tesi e per avermi guidata durante la stesura. Grazie inoltre al prof. Giulio Casciola, senza il quale non sarei mai riuscita ad avere figure comprensibili delle varietà di cui ho parlato, e alla prof.ssa Sandra Zocca che mi ha indirizzata nella scelta di iscrivermi a questa facoltà e mi ha permesso di sperimentare la vita da insegnante in un liceo.

Un grazie sincero, detto sicuramente troppo poco, ai miei genitori che hanno sempre fatto l'impossibile per aiutarmi in ogni situazione, alla nonna e a tutti i parenti che mi hanno spesso fatto (fin troppi) complimenti per i risultati ottenuti.

Grazie poi a tutti coloro che ho incontrato in questi anni e con cui ho vissuto parte della mia vita.

Grazie a Laura e Francesca per tutti i momenti trascorsi insieme, per le chiacchiere e per avermi sopportata in ogni situazione. Grazie a Carmine che, nonostante la lontananza, è sempre riuscito a starmi vicino e a darmi una mano quando ne avevo bisogno.

Grazie a don Enrico, don PG e don Andrea, a Barbara e Sera e tutti i ragazzi e le ragazze del mio gruppo; grazie a tutto il gruppo giovani, in particolare ad Annalisa, Luca, Graziano e Molly; grazie a Luigi, Isa, Francesca e Giuseppe,

Maria Grazia e Giancarlo e tutti i catechisti con cui si è lavorato e ci si è divertiti in questi anni. Grazie perché ognuno di voi mi ha dato qualcosa e mi ha permesso di crescere.

Grazie alle mie maestre Laura e Cristina, a Geppo, a Patty e ai coach Barbara e Alberto; grazie a Dory, Elena, Eleonora, Lalla, Laurina, Laurona, Miky, Tony, Spimpi, Fausto, Luca e tutte le altre sincere, sincro-boys e chiunque abbia fatto il tifo per noi, e grazie a Manu, Ros e Dona. Grazie sia per le tante soddisfazioni che abbiamo ottenuto insieme sia per l'amicizia che va oltre all'essere compagne di squadra.

Grazie anche a Stefano, Cinzia, Leo, Ivan, Antonio, Piero, Marco, Mirco, Silvia, Gabriele e tutti i ragazzi e le ragazze conosciuti in biblioteca e con i quali ho trascorso tante pause.

Infine, ovviamente non per importanza, grazie a Eleonora, Matteo, Ivan, Yannick, Giacomo, Elena, Francesca, Filippo, Marcello, Chiara e tutti gli altri compagni, e non solo colleghi, con i quali ho condiviso questa avventura. Da ultimo un ringraziamento, come mi è stato consigliato, a Messenger, Skype e al sito www.sincroroller.it per il tanto tempo che mi hanno permesso di perdere.