

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

---

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

Corso di Laurea in **INGEGNERIA ENERGETICA**

Tesi di Laurea in **GEOMETRIA E ALGEBRA**

# **Problemi topologici nei reattori a fusione nucleare**

**CANDIDATO:**

Samuele Mazzi

**RELATORE:**

Chiar.mo Prof. Massimo Ferri

**CORRELATORI:**

Prof. Marco Breschi

Prof. Emanuele Ghedini

---

Anno Accademico 2014/2015 - Sessione II

*A Maria Rosa*

Il primo ringraziamento va sicuramente al Prof. M. Ferri per la disponibilità e la pazienza con cui mi ha seguito in questo percorso di tesi, anche se forse dovrei maggiormente ringraziarlo per l'impegno, la passione e l'entusiasmo con cui decora ogni sua lezione e che mi hanno permesso di amare la sua materia. Un ulteriore ringraziamento speciale va al Prof. M. Breschi e al Prof. E. Ghedini per l'immenso aiuto e i fondamentali consigli che mi hanno fornito nella stesura della tesi.

Desidero, inoltre, ringraziare i Grilli, con i quali sono riuscito a combattere le difficoltà della vita universitaria, delle lezioni e della noia, e ringrazio anche gli Ussaniani per aver sempre portato gioia e affetto nella nostra strana famiglia.

Il ringraziamento più sentito, però, è per Brunella e Paolo, i miei genitori, i quali mi hanno permesso di raggiungere questo obiettivo con il loro fondamentale supporto e profondo amore.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1. Strumenti matematici</b>	<b>10</b>
1.1. Campi vettoriali . . . . .	10
1.2. Spazi topologici . . . . .	11
1.3. Varietà e superfici . . . . .	13
1.4. Caratteristica di Eulero . . . . .	17
1.5. Teoremi finali . . . . .	19
<b>2. Confinamento mediante specchi magnetici</b>	<b>23</b>
2.1. Moto di una particella carica in un campo magnetico statico . .	23
2.2. Mirror effect . . . . .	28
2.3. Mirror machine . . . . .	37
2.4. Considerazioni topologiche finali . . . . .	39
<b>3. Applicazione del teorema della palla pelosa all'anisotropia dei superconduttori di tipo-II</b>	<b>43</b>
3.1. Cenni sui materiali superconduttori di tipo-II . . . . .	44
3.2. Corpo centrale dell'articolo . . . . .	45
3.3. Soluzioni all'anisotropia dei reticoli dei vortici . . . . .	47
3.4. Conclusioni . . . . .	49
<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>



# Introduzione

Il confinamento magnetico nei reattori per la fusione termonucleare controllata è un problema annoso che ha impegnato i fisici di tutto il mondo negli ultimi sessant'anni. Infatti, per poter soddisfare il criterio di Lawson, e poter così dar vita ad una reazione di fusione nucleare che sia, nel bilancio energetico, complessivamente vantaggiosa e duratura nel tempo, è necessario riuscire a confinare il plasma all'interno di una struttura da cui sia poi possibile estrarre questa energia liberata dalla reazione. Nel tempo, diversi progetti sono stati sviluppati, e sono state indagate svariate forme e configurazioni di questi campi magnetici, volti sempre ad una maggiore efficienza nel confinamento. Nei primi anni, ovvero alla nascita dei primi progetti per la reazione termonucleare controllata, il confinamento magnetico ha visto opporsi essenzialmente due configurazioni: la configurazione a specchi magnetici, che ha una forma aperta (cioè le linee del campo magnetico non si richiudono su se stesse all'interno del volume di confinamento), e la configurazione del tokamak, che invece ha una forma toroidale, quindi chiusa. La prima, cioè la configurazione a specchi magnetici, fu accantonata ben presto, già negli anni '80 (sebbene oggi sia ancora presente qualche nucleo scientifico che tenti di migliorarne l'efficacia), a favore della più promettente configurazione toroidale del tokamak, oggi utilizzata nei maggiori progetti mondiali, come in ITER e nel suo successore DEMO.

Con questa tesi, abbiamo esaminato un diverso approccio al problema di quale sia la configurazione migliore. Studiando alcuni teoremi topologici, quali il teorema di Poincaré-Hopf e il suo corollario "teorema della palla pelosa", abbiamo cercato di dare una risposta al perché la configurazione a specchi magnetici sia stata abbandonata, mentre quella toroidale abbia convinto i fisici di tutto il mondo. La tesi proposta, dunque, analizza il problema da un punto di vista geometrico-topologico, cercando di considerare anche un nuovo punto di vista sulla questione.

Nel primo capitolo abbiamo fornito gli strumenti matematici e topologici che ci saranno utili poi ad attaccare il problema e trovarne una soluzione accettabile nel secondo capitolo, dove invece abbiamo analizzato, prima da un punto di vista fisico, la configurazione degli specchi magnetici e poi il comportamento topologico. In un ulteriore capitolo, sull'onda della presa di coscienza della potenza del teorema della palla pelosa, abbiamo applicato questo teorema anche sull'anisotropia del reticolo dei vortici all'interno di un materiale superconduttore immerso in un campo magnetico.





# Capitolo 1

## Strumenti matematici

I riferimenti per questo capitolo sono le fonti [1], [2] e [3].

In questo capitolo verranno trattati gli strumenti matematici e i teoremi, utili poi a ricomporre il problema fisico da un punto di vista completamente matematico. La trattazione seguirà una struttura logica utile solo alla piena consapevolezza del significato e della potenza dei due teoremi su cui baseremo le fondamenta dell'intera tesi, ovvero il teorema dell'indice di Poincaré e il teorema della palla pelosa.

### 1.1. Campi vettoriali

**Definizione 1.** Sia  $M \subseteq R^N$  una varietà n-dimensionale. Un campo vettoriale tangente  $\mathbf{v}$  su  $M$  è una funzione continua  $\mathbf{v} : M \rightarrow R^N$  tale che  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M$  per ogni  $\mathbf{x} \in M$ . Allora,  $\mathbf{v}$  associa ad ogni punto  $\mathbf{x} \in M$  un vettore tangente  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

Dove  $T_{\mathbf{x}}M$  è lo spazio tangente alla varietà n-dimensionale nel suo punto  $\mathbf{x}$ .

È importante al fine della nostra trattazione la **Definizione 1** poiché il campo magnetico di cui andremo a discutere successivamente è un campo vettoriale nello spazio, perciò ad ogni punto dello spazio è associabile un vettore con direzione, verso e intensità del campo magnetico in quel punto.

Introduciamo poi la nozione di punto critico:

**Definizione 2.** Un punto in cui  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$  è chiamato punto critico per il campo vettoriale. Un punto critico isolato  $\mathbf{x}$  è un punto critico tale che non esistano altri punti critici in un qualche intorno di  $\mathbf{x}$ .

Il punto critico (o, come potremo chiamarlo successivamente, una singolarità del campo vettoriale) è di fondamentale importanza nella nostra trattazione, perché è il cardine su cui poggiano i teoremi successivi e il nostro intero problema. Sebbene, poi, il Teorema di Poincaré-Hopf sia valido per qualsiasi dimensione  $n$  del nostro spazio, ci focalizzeremo solo sulle superfici a 2 dimensioni (prendendo in esame il teorema dell'indice di Poincaré), dato che il problema del confinamento magnetico riguarda la nostra realtà esperibile, ovviamente tridimensionale, e di conseguenza la superficie entro cui vogliamo confinare è sicuramente una superficie bidimensionale.

## 1.2. Spazi topologici

Prima di poter parlare di varietà, e in particolare di varietà bidimensionali, dobbiamo introdurre la definizione di spazio topologico e di spazio topologico di Hausdorff:

**Definizione 3.** Sia  $X$  un insieme e sia  $\Omega$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  tali che:

- (i)  $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$ ;
- (ii) l'intersezione di due elementi di  $\Omega$  appartiene a  $\Omega$ ;
- (iii) l'unione di una qualsiasi famiglia di elementi di  $\Omega$  appartiene a  $\Omega$ .

Una famiglia così costruita viene detta topologia su  $X$ . L'insieme  $X$  con una data famiglia  $\Omega$  viene detto spazio topologico e viene indicato con  $(X, \Omega)$ , o più semplicemente con  $X$ . Gli elementi  $U \in \Omega$  sono chiamati insiemi aperti, sottoinsiemi aperti o semplicemente aperti di  $X$ . Gli elementi di  $X$  sono chiamati punti di  $X$ .

**Definizione 4.** Uno spazio topologico  $X$  è uno spazio di Hausdorff se per ogni paio di punti distinti  $x, y \in X$ , esistono due insiemi aperti e disgiunti  $U$  e  $V$  tali che  $x \in U$  e  $y \in V$ .

Quest'ultima definizione è utile ai fini del successivo paragrafo, il quale chiarisce cosa significhi una varietà topologica, poiché esistono spazi con proprietà ingannevoli, che non tratteremo, i quali sono varietà ma non

sembrano comportarsi localmente come lo spazio euclideo (si vedano i riferimenti [1], [2] o [3] per ulteriori chiarimenti); inoltre, un'ulteriore ragione per cui vogliamo che la varietà sia di Hausdorff è la volontà di poter rappresentare la varietà stessa come un sottospazio di un qualche spazio euclideo  $R^n$ , in modo che la varietà erediti la condizione di Hausdorff dallo spazio ambiente  $R^n$ , e si possa asserire, mediante un teorema, che una varietà compatta  $M$  sia omeomorfa ad un sottospazio di uno spazio euclideo  $R^n$ . Prima però introduciamo il concetto di disco e di equivalenza topologica, utilizzati nelle successive definizioni:

Il disco o una palla centrata nel punto  $\mathbf{x}$  con raggio  $r$ , per qualsiasi spazio di cui stiamo parlando, è denotato dalla simbologia  $D^n(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in R^n: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$ , che a volte semplificheremo in  $D^n(\mathbf{x}, r)$ . Quindi è facilmente intuibile che in  $R^1$  il  $D^1(x, r)$  sia un intervallo aperto sulla retta reale centrato in  $x$ ; in  $R^2$  invece è un vero e proprio disco (che non include però la circonferenza)  $D^2(\mathbf{x}, r)$  con centro in  $\mathbf{x}$  e raggio  $r$ ; infine in  $R^3$ , il nostro caso di maggior interesse per l'intera trattazione,  $D^3(\mathbf{x}, r)$  è una palla solida (che non include la sfera di contorno) con centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $r$ . Questi dischi,  $D^n(\mathbf{x}, r)$ , sono chiamati intorni (o dischi di intorno) di  $\mathbf{x}$  in  $R^n$ . Da qui si giunge alla definizione generale di intorno di punto  $\mathbf{x}$ :

**Definizione 5.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\mathbf{x}$  un punto di  $X$ . Un sottoinsieme  $N \subseteq X$  contenente  $\mathbf{x}$  viene detto un intorno di  $\mathbf{x}$  se esiste un aperto  $U$  con  $\mathbf{x} \in U \subseteq N$ .

Mentre invece l'equivalenza topologica è definita come:

**Definizione 6.** Siano  $A$  e  $B$  due spazi topologici. Allora  $A$  è topologicamente equivalente o omeomorfo a  $B$  se esiste una funzione continua e invertibile  $f: A \rightarrow B$ , con l'inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$ . Una tale funzione  $f$  è chiamata omeomorfismo.

Quest'ultima definizione è molto importante ai fini dell'intera trattazione perché introduce il concetto di omeomorfismo, che riprenderemo anche nei

capitoli successivi. Possiamo inoltre aggiungere anche un teorema, di cui non diamo la dimostrazione, riguardo l'equivalenza topologica, cioè l'omeomorfismo:

**Teorema 1.** L'equivalenza topologica è una relazione di equivalenza.

### 1.3. Varietà e superfici

Possiamo, dunque, introdurre il concetto di varietà:

**Definizione 7.** Una varietà n-dimensionale è uno spazio topologico tale che ogni punto ha un intorno topologicamente equivalente ad un disco n-dimensionale (aperto)  $D^n(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in R^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$ . Richiederemo successivamente che ogni paio di punti distinti abbiano intorni disgiunti.

Per poterci avvicinare alla dimostrazione del Teorema dell'indice di Poincaré, e similamente del Teorema della palla pelosa, è necessario introdurre alcune caratteristiche che la varietà deve soddisfare:

**Definizione 8.** Una varietà n-dimensionale con bordo è uno spazio topologico in cui ogni punto ha un intorno topologicamente equivalente a un disco n-dimensionale aperto o ad un semidisco

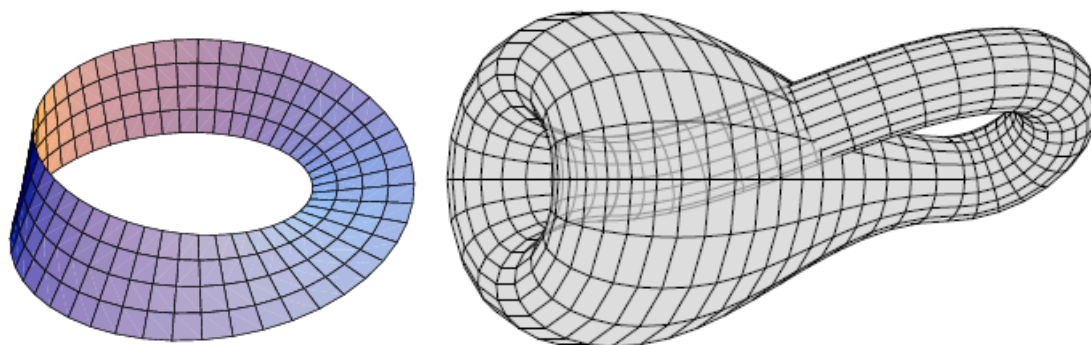
$$D_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : \|\mathbf{x}\| < r \text{ e } x_n \geq 0\}$$

I punti con un intorno a semidisco sono chiamati punti di bordo.

Possiamo ora permetterci di classificare le superfici, cioè le varietà bidimensionali, che sono quelle di nostro stretto interesse, anche perché una classificazione di tutte le varietà di dimensione 3 sarebbe troppo complesso ai fini della nostra trattazione, e perché le varietà di dimensione maggiore di 3 sono addirittura non classificabili. Riportiamo così una tabella riassuntiva che differenzia le principali varietà bidimensionali, combinando le quali possiamo produrre qualsiasi superficie vogliamo (per le nozioni di cavità, maniglia, orientabilità si vedano i testi di riferimento [1], [2] o [3]):

Superficie	Bordo	Cavità	Maniglia	Orientabile
Sfera	No	Sì	No	Sì
Toro	No	Sì	Sì	Sì
Cilindro	Sì	No	No	Sì
Banda di Mobius	Sì	No	No	No
Bottiglia di Klein	No	No	Sì	No

Nella precedente tabella non abbiamo però inserito la somma di  $n$  tori, con  $n$  numero naturale, che è un'altra superficie di grande interesse, come vedremo in seguito.



**Figura 1.** Sulla sinistra una rappresentazione di una Banda di Mobius, e sulla destra una Bottiglia di Klein.

Prima di parlare di compattezza e connessione di uno spazio topologico, dobbiamo però introdurre alcuni concetti base sui semplici, complessi simpliciali e sulla triangolazione, che ci serviranno a comprendere meglio le operazioni che effettueremo sulle superfici di nostro interesse per poter poi giungere alla conclusione dei due teoremi finali.

**Definizione 9.** Dati in uno spazio euclideo i punti  $a_0, a_1, \dots, a_k$  affinemente indipendenti, si dice  $k$ -simpleso di vertici  $a_0, a_1, \dots, a_k$  la chiusura convessa del loro insieme. Faccia (rispettivamente faccia propria) di un  $k$ -simpleso  $s$  è ogni simpleso il cui insieme di vertici è un sottoinsieme (rispettivamente sottoinsieme proprio) dell'insieme di vertici di  $s$ . La dimensione di un  $k$ -simpleso è  $k$ .

Possiamo quindi ora tentare di dare una definizione di complesso simpliciale e di triangolazione, utilizzando poi la notazione  $|K|$  per indicare l'unione dei semplici di  $K$ , e non il complesso stesso:

**Definizione 10.** Un insieme finito  $K$  di semplici è detto complesso simpliciale se:

- (i) ogni faccia di ogni semplice di  $K$  appartiene a  $K$ ;
- (ii) l'intersezione di due qualunque semplici di  $K$  è vuota o è una faccia di entrambi.

**Definizione 11.** Una triangolazione di uno spazio topologico  $X$  è una coppia  $(K, f)$  dove  $K$  è un complesso simpliciale e  $f: |K| \rightarrow X$  è un omeomorfismo. Si dirà allora che  $X$  è triangolato da  $K$ .

Possiamo ora parlare di superficie triangolata e poter così definire perfettamente lo spazio topologico entro cui vogliamo operare:

**Definizione 12.** Una superficie simpliciale (senza bordo) è un complesso simpliciale bidimensionale tale che:

- (i) ogni lato di un triangolo è esattamente il lato di un altro triangolo;
- (ii) i triangoli che hanno in comune uno stesso vertice possono essere nominati come  $T_1, T_2, \dots, T_n$  con i triangoli adiacenti nella sequenza che lo sono attraverso un lato nella superficie e  $T_n$  che è incollato a  $T_1$  mediante un lato.

La condizione (i) garantisce che i punti sui lati delle celle triangolari appartengano esattamente a due triangoli, e così esiste un intorno per ogni punto sul lato di due triangoli che sia la somma di due semidischi, uno che appartiene ad un triangolo e l'altro semidisco all'altro triangolo. Mentre invece la condizione (ii) garantisce anch'essa una conformazione necessaria della triangolazione. Essenzialmente entrambe le condizioni garantiscono che si operi su delle superfici.

Possiamo così introdurre la nozione di compattezza di una superficie, e lo facciamo attraverso questa definizione:

**Definizione 13.** Uno spazio topologico  $X$  è compatto se ogni ricoprimento aperto di  $X$  (cioè una famiglia di aperti la cui unione è  $X$ ) ammette un sottoricoprimento aperto.

La caratterizzazione di compattezza si può poi definire mediante questo teorema:

**Teorema 2.** Una superficie è compatta se e solo se ogni triangolazione usa un numero finito di triangoli.

Introduciamo anche la nozione di connessione di spazi topologici e una successiva caratterizzazione mediante un teorema:

**Definizione 14.** Uno spazio topologico  $X$  è connesso se  $X$  non può essere identificato come l'unione di due insiemi aperti disgiunti e non vuoti.

**Teorema 3.** Una superficie è connessa se e solo se, in una sua triangolazione, i triangoli possono essere ordinati in una sequenza  $T_1, T_2, \dots, T_n$  con ogni triangolo che ha almeno un lato in comune con un triangolo precedente nell'ordine.

Da queste due asserzioni possiamo passare a parlare delle superfici che utilizzeremo successivamente nei teoremi clou dell'intera trattazione. Infatti esiste un teorema che ci assicura che le superfici topologiche a cui dobbiamo limitarci sono solo tre, ovvero la sfera, il toro (o meglio la somma di  $n$  tori) e il piano:

**Teorema 4.** Ogni superficie compatta e connessa è omeomorfa a una sfera, a una somma connessa di  $n$  tori, o ad una somma connessa di  $n$  piani proiettivi.

Dove somma connessa ha questa definizione:



**Definizione 15.** Siano  $S_1$  e  $S_2$  due superfici. La somma connessa di  $S_1$  e  $S_2$  si ottiene rimuovendo da entrambe le superfici un piccolo disco aperto e ricucendo le superfici lungo il bordo dei fori. La somma connessa di  $S_1$  e  $S_2$  si scrive  $S_1 \# S_2$ .

## 1.4. Caratteristica di Eulero

Ora abbiamo quindi terminato di definire lo spazio su cui andremo a operare, e quindi possiamo indirizzarci verso i due teoremi finali, ma non prima di aver introdotto una fondamentale invariante delle superfici, di cui faremo largo utilizzo, ovvero la caratteristica di Eulero:

**Definizione 16.** Sia  $K$  un complesso. La caratteristica di Eulero di  $K$  è:

$$\chi(K) = \#(0 - \text{simplessi}) - \#(1 - \text{simplessi}) + \#(2 - \text{simplessi}) \pm \dots$$

Dove  $\#(S)$  significa il numero di elementi in un insieme finito  $S$ .

Ancora più significativo è come si può intendere la caratteristica di Eulero per una superficie, ovvero per un complesso bidimensionale, poiché è, tra le altre cose, uno dei primi problemi che hanno indotto Eulero, nel diciottesimo secolo, a interrogarsi sulle questioni topologiche, e che da lì lo hanno portato poi a partorire, inconsciamente, la branca della matematica nota oggi come topologia. Infatti, la caratteristica di Eulero per una superficie simpliciale è: siano  $f = \#\{\text{facce}\}$ ,  $e = \#\{\text{spigoli}\}$  e  $v = \#\{\text{vertici}\}$ , allora la caratteristica di Eulero si può scrivere:

$$\chi(K) = v - e + f$$

Il teorema successivo invece ci permette di associare alla sfera una caratteristica di Eulero, indipendentemente dal complesso che intendiamo applicare sulla superficie:

**Teorema 5.** Qualsiasi complesso bidimensionale  $K$ , tale che  $|K|$  è topologicamente equivalente alla sfera, ha la caratteristica di Eulero  $\chi(K) = 2$ .

Ma ancora più importante è il teorema seguente che asserisce:

**Teorema 6.** La caratteristica di Eulero è un invariante topologico per superfici compatte e connesse, e quindi non dipende dalla rappresentazione.

Da quest'ultimo teorema, soffermandoci solamente sulle superfici bidimensionali, ovvero la sfera, il toro e il piano proiettivo, possiamo costruire una semplicissima tabella in cui porre le caratteristiche fondamentali delle tre superfici, e poter calcolare così la caratteristica di Eulero per ogni superficie di interesse:

<b>Superficie</b>	<b><math>f</math></b>	<b><math>e</math></b>	<b><math>v</math></b>	<b><math>\chi</math></b>
Sfera	1	1	2	2
$n$ Tori	1	$2n$	1	$2 - 2n$
$m$ Piani Proiettivi	1	$m$	1	$2 - m$

Da qui possiamo introdurre un altro importante teorema, di cui però non diamo la dimostrazione:

**Teorema 7.** Siano  $S_1$  e  $S_2$  due superfici compatte e connesse orientabili e senza bordo. Allora  $S_1$  è topologicamente equivalente a  $S_2$  se e solo se  $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ .

Praticamente questo teorema ci suggerisce che il miglior modo di identificare una superficie è calcolare la caratteristica di Eulero, dopo aver utilizzato la **Definizione 6** per capire se si tratta, in effetti, di una superficie. Inoltre, ci permette di associare tra loro superfici che sembrerebbero non avere nulla in comune, ma che invece hanno aspetti critici del tutto simili, come per esempio la disposizione su di esso di un campo vettoriale.

## 1.5. Teoremi finali

Possiamo ora, dopo aver elencato le definizioni e i teoremi utili a comprendere appieno il significato e la potenza del teorema cardine della nostra trattazione, introdurre, per l'appunto, il teorema dell'indice di Poincaré. Prima però dobbiamo anche aggiungere la nozione di indice di un punto critico di un campo vettoriale e di winding number:

**Definizione 17.** Sia  $\mathbf{v}$  un campo vettoriale su cui ci sia un punto critico isolato  $\mathbf{x}$ . Sia  $D$  un intorno di  $\mathbf{x}$  con contorno  $C$  tale che non ci siano altri punti critici in  $D$  o in  $C$ . L'indice di  $\mathbf{x}$  è dato da  $I_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = w_{\mathbf{v}}(C)$ .

$w_{\mathbf{v}}(C)$  è una notazione matematica che sta ad indicare il winding number di un campo vettoriale su di una curva  $C$ . Per poter chiarificare la notazione, dobbiamo fare un excursus su come il campo vettoriale si muove vicino ad un punto critico; esso infatti è continuo e prevedibile a meno della singolarità. Se immaginiamo di prendere un punto critico  $\mathbf{x}$  di un campo vettoriale su di una superficie, che esista un disco come intorno e che all'interno e sul confine dell'intorno non ci siano altri punti critici eccetto a  $\mathbf{x}$ , allora possiamo pensare che esista il confine dell'intorno e che su ogni punto di esso ci sia un vettore non nullo del campo vettoriale. Immaginiamo poi di camminare lungo questo confine dell'intorno in senso antiorario tenendo in mano una bacchetta magica capace di puntare sempre in direzione del campo vettoriale. Nel momento in cui torniamo al punto di partenza della nostra camminata, anche la bacchetta magica è tornata alla direzione in cui puntava alla partenza, ma durante il percorso essa deve avere fatto forzatamente un numero intero di rivoluzioni in senso antiorario o orario; ad ogni rotazione in senso antiorario sarà associato il numero delle rivoluzioni con segno positivo, nel caso invece di rivoluzioni orarie il numero che associamo è sempre intero ma negativo. Questo numero, che dunque si associa ad ogni punto critico, è chiamato winding number  $w_{\mathbf{v}}(C)$  del campo vettoriale nel confine dell'intorno. È importante sottolineare che la curva di confine dell'intorno non deve necessariamente essere una circonferenza, ma basta che sia una curva di Jordan, cioè una qualsiasi curva topologicamente

equivalente alla circonferenza che includa una regione omeomorfa al disco (dimostrabile attraverso il teorema di Schoenflies, presente nel capitolo 10.2 della fonte bibliografica [1]). Questo metodo per contare il winding number di una curva d'intorno funziona molto bene, sebbene ne esistano altri che si basano sul normalizzare i vettori che si trovano sul confine dell'intorno e di capire quale sia quel numero intero che moltiplicato alla funzione di omomorfismo restituisca la funzione iniziale tra la curva dell'intorno e l'insieme di tutti i vettori su di essa (peraltro questo metodo si può generalizzare per qualsiasi dimensione superiore alla seconda, introducendo il concetto di grado della funzione, la cui definizione è presente nel capitolo 11.1 della fonte bibliografica [1]).

In questo modo abbiamo la facoltà di calcolare l'indice di un qualsiasi punto critico del nostro campo vettoriale su una qualsiasi superficie, e così di introdurre l'argomento cardine di questo capitolo, ossia il teorema dell'indice di Poincaré (o teorema di Poincaré):

**Teorema 8 (Teorema dell'indice di Poincaré).** Sia  $\mathbf{v}$  un campo vettoriale tangente ad una superficie liscia  $S$  con i soli punti critici  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ . Allora:

$$\sum_{i=1}^k I_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_i) = \chi(S)$$

Per correttezza, riportiamo anche la definizione di superficie liscia utilizzata nel precedente teorema, ovviamente con tutto ciò che ne concerne, e quindi solamente dopo aver definito cosa sia un diffeomorfismo:

**Definizione 18.** Sia  $A \subseteq R^N$  una sottovarietà. Una funzione  $f : A \rightarrow B \subseteq R^k$  è un diffeomorfismo se  $f$  è un omeomorfismo e sia  $f$  che la sua inversa sono lisce, cioè hanno tutte le derivate parziali, di ogni ordine, continue.

E quindi una varietà  $n$ -dimensionale, e nel particolare una superficie bidimensionale, liscia sarà così definita:

**Definizione 19.** Una varietà  $n$ -dimensionale liscia è una varietà  $n$ -dimensionale  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  tale che ogni punto  $\mathbf{x} \in M$  ha un disco d'intorno  $U$  relativo a  $M$  con un diffeomorfismo  $f : D^n \rightarrow U$ , dove  $D^n$  è un disco in  $\mathbb{R}^n$ .

Quest'ultima definizione ci permette di trovare, per ogni intorno di ogni punto della varietà, uno spazio tangente. Nel caso di superficie bidimensionale, riusciremo ad associare ad ogni punto un piano tangente su cui giacerà il vettore del campo vettoriale associato alla superficie.

Dal **Teorema 8** si possono trarre molteplici informazioni e commenti. Noi ci soffermeremo sulla considerazione che, essendo la caratteristica di Eulero di una superficie sferica uguale a 2, deve forzatamente esistere almeno un punto critico, per soddisfare appunto il **Teorema 8**. E questo risultato è molto importante, perché significa, in parole strette, che ogni superficie sferica (ma anche ogni superficie che sia omeomorfa alla sfera) ha necessariamente almeno una singolarità in un qualsiasi campo vettoriale disegnato su di essa; volendo dare un esempio pratico, sulla superficie terrestre esiste sempre almeno un punto in cui il vento non soffia, poiché, se immaginiamo la superficie terrestre come omeomorfa ad una sfera e definiamo il campo vettoriale della velocità orizzontale (tangente alla superficie) del vento sulla superficie sferica stessa, notiamo che in almeno un punto questo campo vettoriale deve essere nullo, cioè il vento non ha velocità orizzontale, cioè non soffia. Cercando di rendere la trattazione più formale, scriveremo questo corollario come:

**Teorema 9 (Teorema della palla pelosa).** Siano  $S^2$  una sfera e  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione continua che associa ad ogni punto  $\mathbf{x}$  della sfera un vettore tridimensionale che giace nel piano tangente alla sfera nel punto  $\mathbf{x}$ . Esiste almeno un punto  $\mathbf{x}_c$  tale che  $f(\mathbf{x}_c) = 0$ .



# Capitolo 2

## Confinamento mediante specchi magnetici

Il riferimento per questo capitolo è la fonte [4].

Questo capitolo è dedicato alla configurazione geometrica del reattore nucleare, studiato sia in termini fisici che topologici.

### 2.1. Moto di una particella carica in un campo magnetico statico

Il riferimento per questo paragrafo è il capitolo 8.2 della fonte [4].

Prima di introdurre i concetti principali del confinamento magnetico, dobbiamo per correttezza parlare anche del moto di una singola particella all'interno di un campo magnetico, e capire il perché un confinamento con un campo magnetico è un'ottima strategia per la fusione. Immaginiamo ora di porci in un campo magnetico stazionario, ossia stabile nel tempo; facciamo ciò per semplificare la trattazione, dato che non è di nostro interesse al momento indagare che effetto provochi sul moto della singola particella una variazione del campo magnetico. Ulteriori semplificazioni alla trattazione saranno esplicitate nel corso della stessa.

Volendo capire quale sia il moto di una singola particella indisturbata in un campo magnetico  $B$  costante, utilizziamo le equazioni del moto derivate dalla legge di Newton. Le uniche forze di cui ci occuperemo saranno la forza di Lorentz e la forza che il campo elettrico imprime sulla particella carica del plasma. La forza di gravità ha un effetto di parecchi ordini di

grandezza inferiore, quindi del tutto trascurabile. Le equazioni di partenza saranno:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

Ovviamente il campo magnetico dipenderà in generale dal tempo e dallo spazio,  $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ , così come per il campo elettrico,  $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ . Consideriamo però, come già avevamo accennato, il caso in cui  $\mathbf{E}=0$  e il campo magnetico sia indipendente dal tempo, quindi  $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Possiamo quindi semplificare la prima equazione, anche moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{v}$  sia a destra che a sinistra:

$$m\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$$

Otteniamo così un primo risultato importante, ovvero che l'energia cinetica di una particella carica immersa in un campo magnetico stazionario è costante,  $\frac{1}{2} m v^2 = \text{cost}$ . Quindi, i risultati importanti che notiamo immediatamente sono la conservazione dell'energia cinetica all'interno di un campo magnetico statico e pure che lo stesso campo non produce una forza parallela alle linee di campo, proprio perché non ne modifica l'energia cinetica e quindi la velocità parallela. Se volessimo poi esplicitare il comportamento della singola particella mediante un sistema di equazioni differenziali, assumendo un campo magnetico  $\mathbf{B}=B\mathbf{e}_z$  (dove ovviamente  $B$  è costante) diretto lungo la componente  $z$  del nostro spazio tridimensionale, scriveremmo questo set di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y & v_x(0) &= v_{x0} = v_{\perp} \cos(\varphi) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x & v_y(0) &= v_{y0} = v_{\perp} \sin(\varphi) \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 & v_z(0) &= v_{z0} = v_{//} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x & x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= v_y & y(0) &= y_0 \\ \frac{dz}{dt} &= v_z & z(0) &= z_0\end{aligned}$$

Dove  $\omega_c = qB/m$  è la frequenza di Larmor (o anche gyro frequency), mentre  $v_{\perp}$ ,  $v_{//}$ ,  $\varphi$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  sono costanti del moto che rappresentano l'iniziale velocità e posizione del moto.

Focalizzandoci sulla componente parallela del moto, il set di equazioni si riduce a:

$$\begin{aligned}\frac{dv_z}{dt} &= 0 & v_z(0) &= v_{z0} = v_{//} \\ \frac{dz}{dt} &= v_z & z(0) &= z_0\end{aligned}$$

Le cui soluzioni sono facilmente intuibili:

$$v_z(t) = v_{//} \qquad z(t) = z_0 + v_{//}t$$

Quindi, l'azione del campo magnetico sulla componente parallela è nulla, ovvero non modifica il moto della particella, per cui non possiamo confinare la particella in questa direzione spaziale.

Parlando invece della componente perpendicolare, ovvero il moto che si sviluppa sul piano  $xy$ , utilizzeremo le equazioni della velocità rimanenti dal set iniziale:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y & v_x(0) &= v_{x0} = v_{\perp} \cos(\varphi) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x & v_y(0) &= v_{y0} = v_{\perp} \sin(\varphi)\end{aligned}$$

E facilmente troviamo le soluzioni a queste equazioni differenziali:

$$v_y(t) = -v_{\perp} \sin(\omega_c t - \varphi)$$

$$v_x(t) = v_{\perp} \cos(\omega_c t - \varphi)$$

Da queste soluzioni si capisce immediatamente che le particelle ruotano lungo una traiettoria circolare, girando ad una frequenza uguale alla frequenza di Larmor  $\omega_c$ . Si può inoltre notare che per un campo magnetico statico, non si conserva solo l'energia cinetica, ma anche la componente parallela della velocità, così come la componente perpendicolare.

Se poi integriamo anche la velocità, risaliamo all'equazione che ci permette di avere la traiettoria lungo la componente perpendicolare:

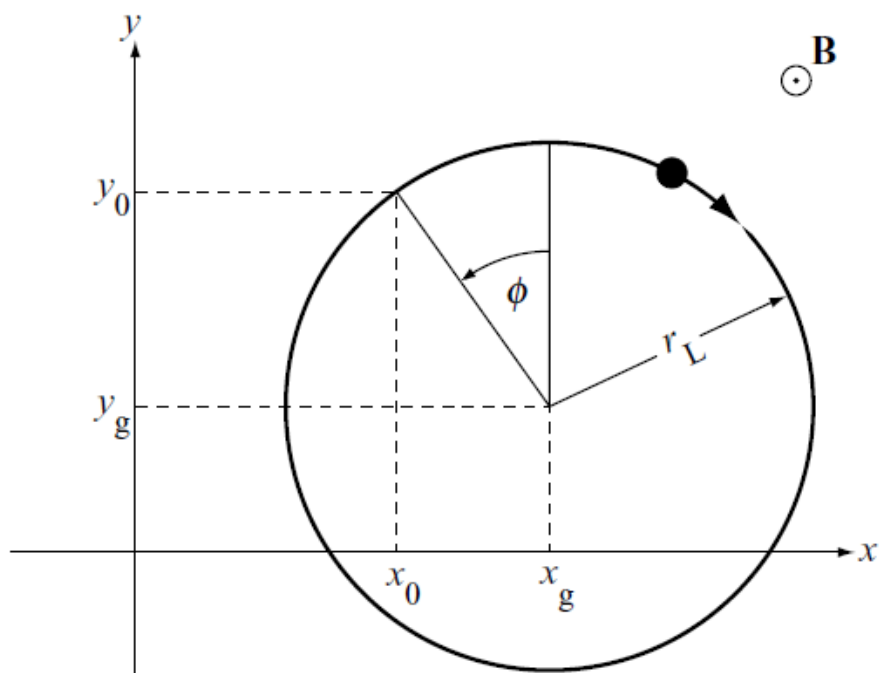
$$x(t) = x_g + r_L \sin(\omega_c t - \varphi) \quad \text{con } x_g = x_0 + r_L \sin(\varphi)$$

$$y(t) = y_g + r_L \cos(\omega_c t - \varphi) \quad \text{con } y_g = y_0 - r_L \cos(\varphi)$$

Dove  $r_L$  è il raggio di Larmor (o gyro radius), dato dall'espressione  $r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = mv_{\perp}/qB$ .

Da qui si ricava, come già abbiamo intuito, che l'orbita della particella è circolare sul piano  $xy$  (**Figura 1**).

$$(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2 = r_L^2$$



**Figura 1.** Rappresentazione sul piano perpendicolare  $xy$  del moto elicoidale di una particella carica positivamente in un campo magnetico costante.

Il centro di questa traiettoria è ovviamente posto nel punto  $(x_g; y_g)$ , da cui il nome, che useremo spesso nella trattazione, guiding center.

Essendo poi il raggio di Larmor indubbiamente più piccolo del raggio del plasma, ovvero di una dimensione del volume entro cui il plasma si muove, possiamo pensare che si abbia un buon confinamento lungo la direzione perpendicolare del campo magnetico.

Ovviamente, il verso con cui le particelle ruotano in questo spazio, attorno alle linee di campo, dipende dalla loro carica. Infatti deve sempre essere rispettata la legge di Lenz, e quindi la particella deve girare in modo tale da creare un campo magnetico che si oppone a quello che ha generato il suo moto.

La traiettoria totale della particella, componendo i due moti nelle direzioni parallele e perpendicolari, è una curva elicoidale che ruota intorno alla linea di campo magnetico. Da questa considerazione, e dalle precedenti che abbiamo fatto, si giunge alla conclusione che dobbiamo sicuramente richiudere queste linee di campo entro una superficie, altrimenti ogni particella carica, risentendo dell'effetto del campo magnetico, in tempi brevissimi, scapperebbe lungo la linea del campo, andando a sbattere sul first

wall entro cui cerchiamo di confinare il plasma. Occorre invece trattenere il plasma per un tempo infinitamente più lungo per permettere alle particelle di creare i presupposti alla fusione nucleare.

## 2.2. Mirror effect

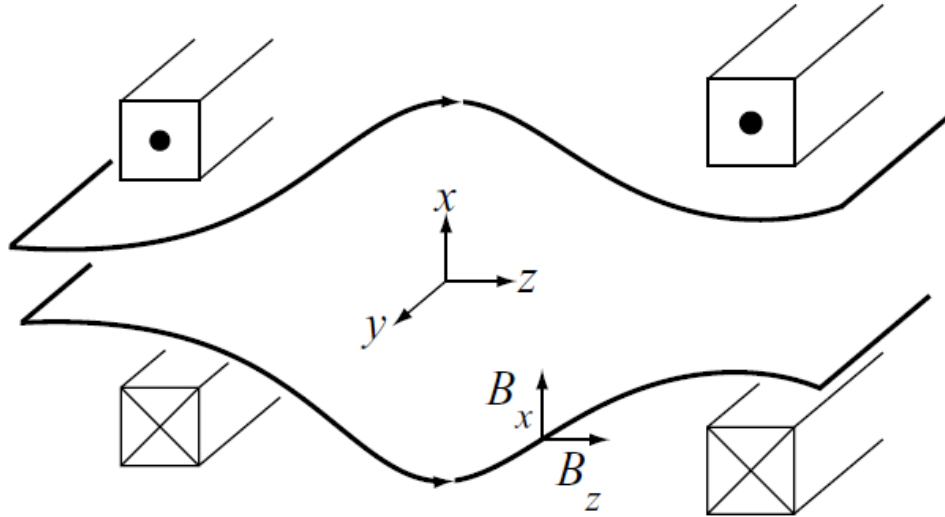
Il riferimento per questo paragrafo è il capitolo 8.9 della fonte [4].

Per poter sfruttare la reazione di fusione termonucleare, dobbiamo trovare una configurazione alle linee del campo che permetta di avere alti tempi di confinamento, e dunque si potrebbe pensare di richiudere queste linee di campo entro una struttura sferica. Questo è ciò che pensarono negli anni '50 dell'ultimo secolo i fisici che studiavano la fusione termonucleare controllata. Essi si accorsero, infatti, di un particolare fenomeno, del quale parleremo approfonditamente in questo paragrafo, che permetteva alle particelle di rimanere confinate entro questa particolare superficie sferica creata dalle linee di campo. La configurazione delle linee di campo è essenzialmente creata dalla disposizione ideale di avvolgimenti entro cui far scorrere corrente e creare così il campo magnetico per il fenomeno di induzione magnetica. Dobbiamo però, per correttezza, aggiungere che la configurazione a specchi magnetici non crea necessariamente una superficie sferica perfetta, ma la superficie può assumere diverse conformazioni. Però, ricordandoci della **Definizione 6** del capitolo matematico, l'importante, ai fini della nostra trattazione, è che questa superficie di confinamento sia omeomorfa alla sfera. Questa tecnologia è stata poi nel tempo trascurata, poiché si è notato che la configurazione toroidale, di cui parleremo più avanti, permetteva risultati estremamente migliori. La nostra trattazione, dunque, verte proprio su questo, sul perché la configurazione a specchi magnetici avrà sempre uno svantaggio permanente, che deriva proprio dalla forma che assume il campo magnetico.

Prima di introdurre il problema degli specchi magnetici dal punto di vista matematico, vediamo come questa configurazione funziona nella pratica. Per farlo dobbiamo introdurre l'invariante adiabatica  $\mu$ :

$\mu$  è la prima invariante adiabatica, ed è definita come  $\mu=IA$ , dove  $I$  è la corrente che fluisce all'interno di un anello circolare, e  $A$  è l'area che occupa questo anello circolare. Possiamo immaginare questo anello come la traiettoria di una particella carica che segue una linea di campo, che, come abbiamo già visto, è elicoidale intorno alla linea stessa. Per questo la corrente che genera una particella carica lungo la sua orbita, per un periodo di tempo uguale ad un giro sulla circonferenza del piano  $xy$ , è  $I = \frac{q}{\tau_c} = q\omega_c/2\pi$ , mentre l'area della circonferenza sarà l'ovvia  $A = \pi r_L^2 = \pi \left(\frac{mv_\perp}{qB}\right)^2$ , e il loro prodotto sarà quindi  $\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}$ , che non è nient'altro che la definizione del momento magnetico. Questa invariante  $\mu$  è costante all'interno di un giro dell'orbita che compie la particella, perché il flusso magnetico incontrato da una particella lungo un giro della sua traiettoria è  $\psi = \pi r_L^2 B = (2\pi m/q^2)\mu \approx \mu$ , e quindi se il campo magnetico  $B$  cambiasse (per ipotesi) lentamente nel tempo, allora anche la velocità perpendicolare e il raggio di Larmor cambierebbero lentamente, in modo tale che il flusso contenuto nell'orbita rimanga costante. Questa costante  $\mu$  è di fondamentale importanza per la tecnologia di confinamento a specchi magnetici, e quindi era assolutamente necessario introdurla prima di poter effettivamente capire quale sia il moto di una particella all'interno di questa tipologia di confinamento magnetico.

Consideriamo sempre di porci all'interno di un campo magnetico statico, però questa volta definito con due componenti non nulle, ovvero  $\mathbf{B}=B_x\mathbf{e}_x+B_y\mathbf{e}_y$  (**Figura 2**).



**Figura 2.** Rappresentazione del modello ideale di un campo magnetico con un gradiente parallelo.

Perciò, le nuove equazioni differenziali della velocità della particella saranno:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B_z ; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} (v_x B_z - v_z B_x) ; \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{q}{m} v_y B_x$$

Per poi poter meglio operare su queste equazioni, introduciamo una terna di versori ortogonali e le corrispettive direzioni delle velocità, di modo che sia facilitata anche l'individuazione delle componenti parallele in confronto a quelle perpendicolari del moto:

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_z \mathbf{e}_z ; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y ; \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{b} = b_z \mathbf{e}_x - b_x \mathbf{e}_z$$

Dove  $b_x = B_x/B$  e  $b_z = B_z/B$ .

Usando questi nuovi versori e modificando le componenti delle velocità, con alcuni semplici passaggi algebrici, possiamo riscrivere le equazioni del moto come:

$$\frac{dv_1}{dt} - \omega_c v_2 = K v_{//} ; \quad \frac{dv_2}{dt} + \omega_c v_1 = 0 ; \quad \frac{dv_{//}}{dt} = -K v_1$$

Dove  $\omega_c$  è sempre la frequenza di Larmor,  $B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2}$ , e  $K = K[x(t), z(t)] = b_x \frac{db_z}{dt} - b_z \frac{db_x}{dt}$ .

Possiamo ora trovare le soluzioni a queste equazioni. Prima però dobbiamo introdurre una nuova variabile temporale  $\tau = \int_0^t \omega_c dt$ , che ci permette di ottenere le nuove equazioni del moto:

$$\frac{dv_1}{d\tau} - v_2 = \tilde{K} v_{//} ; \quad \frac{dv_2}{d\tau} + v_1 = 0 ; \quad \frac{dv_{//}}{d\tau} = -\tilde{K} v_1$$

Dove  $\tilde{K} = K/\omega_c = b_x \frac{db_z}{d\tau} - b_z \frac{db_x}{d\tau}$ .

Il secondo step consta nell'introdurre un campo magnetico che sia chiaramente definito, e il modo più semplice per definire un campo magnetico con una componente non nulla del gradiente parallelo è scriverlo nella forma:  $B_z = B_z(z)$ . Ricordandoci del fatto che la componente trasversale al campo magnetico non è di interesse ai fini di questa trattazione, poiché non modifica il moto della particella, allora per soddisfare la condizione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  dobbiamo ammettere l'esistenza di un campo magnetico trasverso non nullo. Per questo il nostro nuovo modello matematico del campo magnetico sarà:

$$B_z = B_z(z) ; \quad B_x = -x \frac{dB_z}{dz}$$

Ora possiamo invece introdurre una semplificazione che ci aiuta essenzialmente dal punto di vista matematico, senza però perdere correttezza. Questa semplificazione modifica il valore di  $\tilde{K}$ , rendendo le equazioni del moto facilmente risolvibili. L'approssimazione, chiamata approssimazione "long-thin", richiede che  $a/L \ll 1$  (ovvero che la componente parallela  $a$  del campo sia molto minore della lunghezza trasversale  $L$  dell'intero campo magnetico), e implica quindi che  $\frac{B_x}{B_z} \approx \frac{a}{L} \ll 1$ .

$$\tilde{K} = b_x \frac{db_z}{d\tau} - b_z \frac{db_x}{d\tau} = \frac{B_z^2}{B^2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{x}{B_z} \frac{dB_z}{dz} \right) \approx \frac{dx}{d\tau} \left( \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{dz} \right) \approx \frac{v_1}{\omega_c B_z} \frac{dB_z}{dz} \approx \frac{v_1}{v_{//} B_z} \frac{dB_z}{d\tau}$$

Le nostre nuove variabili dell'equazioni diventeranno quindi  $z$  e  $\tau$ , mentre invece il differenziale di  $z$  possiamo intenderlo come:  $dz = (v_z/\omega_c) d\tau \approx (v_{//}/\omega_c) d\tau$ . Dovremmo poi trascurare tutti i termini minori di  $a/L$  e di  $r_L/a$ .

Possiamo ora cercare la soluzione al nostro set di equazioni, focalizzandoci sulla prima invariante adiabatica, ritrovando che è una costante per questo tipo di configurazione del campo magnetico. Prima introduciamo però delle variabili cilindriche della velocità con coefficienti che possono variare in infinitesimi:

$$v_1 = v_{\perp}(\tau) \cos[\tau + \varepsilon(\tau)]$$

$$v_2 = -v_{\perp}(\tau) \sin[\tau + \varepsilon(\tau)]$$

Sostituendo queste ultime definizioni nella componente perpendicolare dell'equazioni del moto, otteniamo:

$$\frac{dv_{\perp}}{d\tau} = \frac{v_{\perp}}{2B_z} \frac{dB_z}{d\tau} [1 + \cos 2(\tau + \varepsilon)],$$

Che può essere riscritta come:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau} = \left( \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{d\tau} \right) \cos 2(\tau + \varepsilon)$$

Si può quindi facilmente constatare che, mediando l'equazione sul periodo di un giro dell'orbita, l'invariante è costante:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2(z)}{2B(z)} = \text{cost.}$$



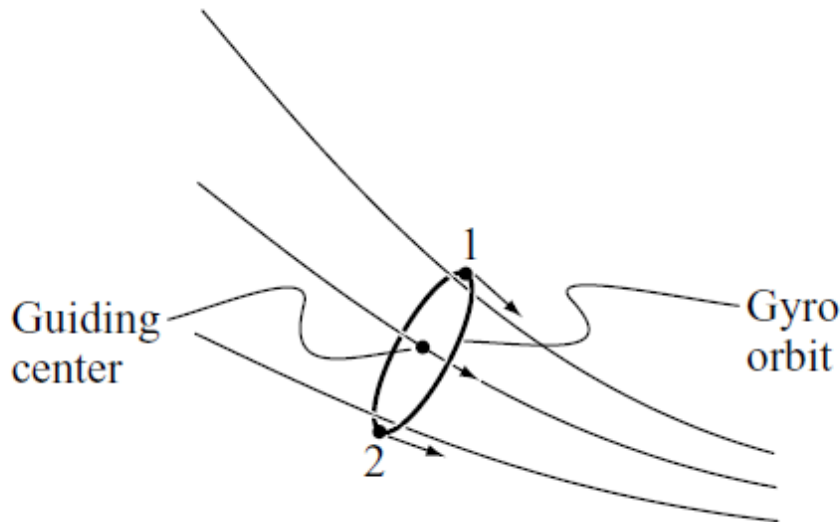
Nella seconda parte della soluzione invece ci preoccuperemo della componente parallela delle equazioni del moto, che, assumendo sempre vera l'approssimazione “long-thin”, si riduce all'equazione:

$$\frac{dv_{//}}{d\tau} = -\frac{v_{\perp}^2}{\omega_c B_z} \frac{dB_z}{dz} = -\frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c B_z} \frac{dB_z}{dz} [1 + \cos(\tau + \epsilon)]$$

Se mediamo anche questa equazione sul periodo di un giro della traiettoria elicoidale della particella, e la riconvertiamo alla variabile temporale reale  $t$ , otteniamo la soluzione:

$$m \frac{dv_{//}}{dt} = -\mu \frac{dB_z}{dz} = -\mu \nabla_{//} B$$

Si osserva così che esiste una forza agente lungo la componente parallela del moto della particella, guidata dal gradiente parallelo del campo magnetico. Le due forme in cui è descritta la forza nella espressione sopra, sono equivalenti, sebbene la seconda non sia derivata dall'approssimazione “long-thin” ma sia una generalizzazione del primo risultato.



**Figura 3.** Confronto tra il moto del guiding center e della reale traiettoria della particella. Il campo magnetico in **1** ha un gradiente maggiore rispetto al punto **2**.

Sembrerebbe così nascere un paradosso, perché le considerazioni, da cui eravamo partiti per l'intera trattazione matematica della traiettoria della particella, dimostravano che non esisteva una componente della forza agente sulla componente parallela del moto, come invece l'ultimo risultato trovato asserisce. Esiste una spiegazione a questa impasse, ovvero che la forza agisce non sulla particella, ma sul moto del guiding center, questo perché la particella, nel suo moto elicoidale, può incontrare un campo magnetico che localmente varia la propria intensità (o varia spazialmente in maniera non concorde lungo la traiettoria elicoidale della particella, si veda la **Figura 3**), e quindi il campo che incontra il guiding center non è esattamente lo stesso campo che la particella incontra nel suo moto, e per questo si crea una forza agente lungo la direzione parallela del moto del guiding center. È importante sottolineare però che questa forza agisce sul moto del guiding center lungo la sua componente parallela, ma rispetto al moto della particella agisce lungo la direzione perpendicolare.

E questo fenomeno appena spiegato è proprio il concetto per cui si può parlare di mirror effect da parte del campo magnetico sul moto delle particelle cariche del plasma. Infatti la combinazione di  $\mu = \text{cost.}$  e  $F_{//} = -\mu \nabla_{//} B$  può portare ad un'inversione netta del moto del guiding center, e di conseguenza della particella, che praticamente torna a ripercorrere la stessa traiettoria elicoidale ma in verso opposto. Il punto in cui il moto si inverte è detto mirror point, per l'appunto.

Qualitativamente parlando, l'effetto specchio si manifesta quando la particella, nella sua traiettoria, viaggia verso zone del campo a maggiore intensità, praticamente dove le linee del campo si addensano, ovvero dove il gradiente del campo aumenta. Siccome  $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{cost.}$ , allora questo implica che se aumenta l'intensità del campo  $B$  deve necessariamente aumentare la velocità perpendicolare della particella lungo la sua orbita. Inoltre, ricordandoci che in un campo magnetico statico l'energia cinetica si conserva, ovvero  $E = \frac{1}{2}m(v_{//}^2 + v_{\perp}^2)$ , allora si deve conservare la somma del quadrato della velocità perpendicolare col quadrato della velocità parallela. Quindi, un aumento nella velocità perpendicolare è sempre accompagnato da una diminuzione nella componente parallela. La particella raggiungerà un

punto di riflessione nel quale, se l'intensità del campo è abbastanza elevata per soddisfare il requisito, la velocità parallela si annullerà, e questo punto è proprio il mirror point. Una volta raggiunto quel punto la particella invertirà il proprio moto, spinta dalla forza, di cui prima abbiamo parlato e discusso analiticamente,  $F_{//} = -\mu \nabla_{//} B$ .

Se volessimo invece calcolare le condizioni per le quali si ha questo fenomeno e tracciare, per così dire, una sorta di dominio delle particelle che vengono riflesse, dobbiamo riflettere su quale deve essere la relazione tra la componente parallela e quella perpendicolare della velocità. Immaginiamo che la particella parta in una regione di spazio nel quale il campo magnetico non ha la propria intensità massima (anzi, immaginiamo che sia esattamente nel punto di minima intensità), e che viaggi verso la zona di massima intensità con una certa velocità iniziale. Possiamo riassumere queste condizioni in queste espressioni:

$$\mu = \frac{mv_{\perp i}^2}{2B_{min}} \quad ; \quad E = \frac{1}{2}m(v_{//i}^2 + v_{\perp i}^2)$$

Nel caso esista, al mirror point avremo queste velocità, e conseguentemente queste costanti:

$$v_{\perp} = v_{\perp f} \quad ; \quad v_{//f} = 0 \quad ; \quad \mu = \frac{mv_{\perp f}^2}{2B_f} \quad ; \quad E = \frac{1}{2}mv_{//f}^2$$

Per cui, se assumiamo che la velocità iniziale della particella sia  $v_0$  allora possiamo anche scrivere che

$$v_{\perp i} = v_0 \sin \theta$$

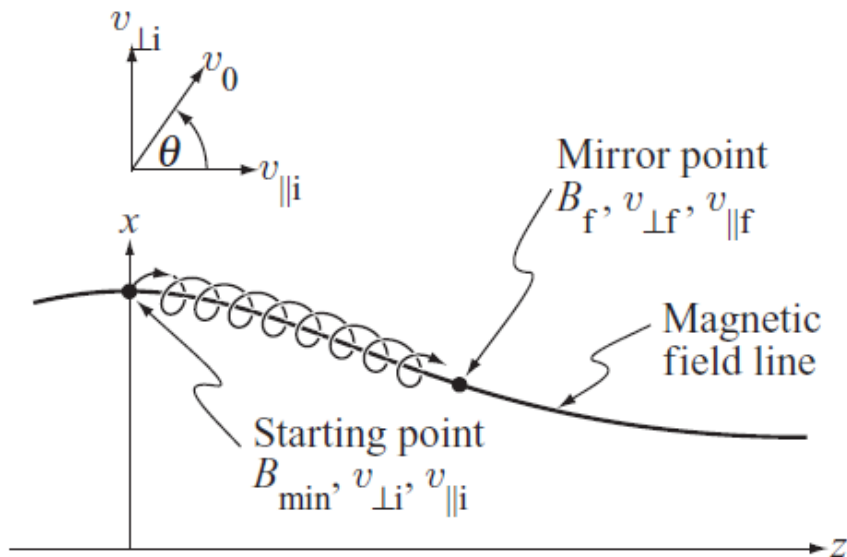
$$v_{//i} = v_0 \cos \theta$$

Applicando il principio di conservazione dell'invariante adiabatica per un campo magnetico statico, otteniamo la seguente relazione:

$$\frac{v_{\perp i}^2}{B_{min}} = \frac{v_{\perp f}^2}{B_f}$$

La quale si può semplificare e scrivere in funzione dell'angolo critico di pitch  $\theta_c$ , cioè l'angolo che inizialmente esiste tra la componente parallela del moto e la sua composizione vettoriale con anche la componente perpendicolare e entro il quale è attivo il fenomeno descritto:

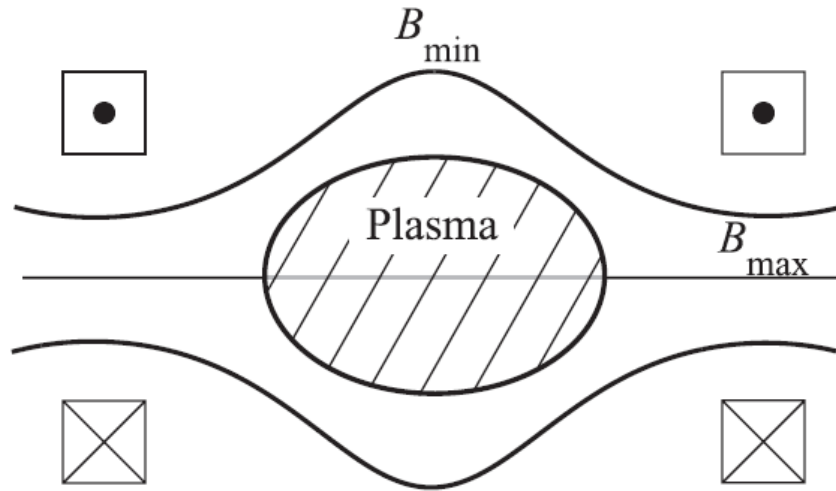
$$\sin^2 \theta_c = \frac{B_{min}}{B_f}$$



**Figura 4.** Rappresentazione del modello degli specchi magnetici, con anche la rappresentazione delle velocità iniziali e dell'angolo di pitch.

È dunque facile definire un dominio delle particelle che subiscono il fenomeno del mirror effect da parte del campo magnetico: le particelle che hanno un angolo di pitch iniziale maggiore dell'angolo critico saranno tutte riflesse prima del mirror point e saranno così confinate, mentre le particelle che hanno un angolo di pitch iniziale inferiore all'angolo critico (significa avere una bassa velocità nella componente perpendicolare) supereranno il mirror point e si disperderanno al di fuori del volume di confinamento. Risulta che saranno confinate molto facilmente (dipendentemente sempre

dalla conformazione spaziale del campo magnetico) tutte le particelle che hanno una iniziale componente perpendicolare della velocità maggiore di quella parallela, ovvero che  $v_{\perp i} > v_{\parallel i}$ .



**Figura 5.** Geometria della mirror machine.

## 2.3. Mirror machine

Anche per questo paragrafo il riferimento è il capitolo 8.9 della fonte [4]. Ora possiamo così introdurre la tecnologia che permette di sfruttare questo fenomeno e poter così confinare il plasma: la mirror machine, la macchina a specchi magnetici (**Figura 5**). Il funzionamento è molto semplice: due avvolgimenti percorsi da corrente nello stesso verso creano un campo magnetico con il massimo proprio in corrispondenza dei due avvolgimenti e il minimo che invece resta nella regione centrale, proprio nel mezzo tra i due avvolgimenti. Se pensiamo ora di riempire il volume compreso tra i due avvolgimenti, ovvero dove si dovrebbe sviluppare il campo magnetico, con il plasma, ci possiamo chiedere quali particelle rimangono confinate all'interno di esso. Come abbiamo già detto, le particelle con un angolo di pitch sufficientemente elevato rimangono confinate perché l'inversione del moto del loro guiding center è prima del punto critico, del mirror point,

proprio il punto di limite entro cui invertire la traiettoria prima di disperdersi contro il first wall. Possiamo definire un parametro costruttivo della macchina che ci aiuta nella trattazione perché ci permette di semplificare alcune notazioni, e questo parametro è la mirror ratio, definito come:

$$R = B_{max}/B_{min}$$

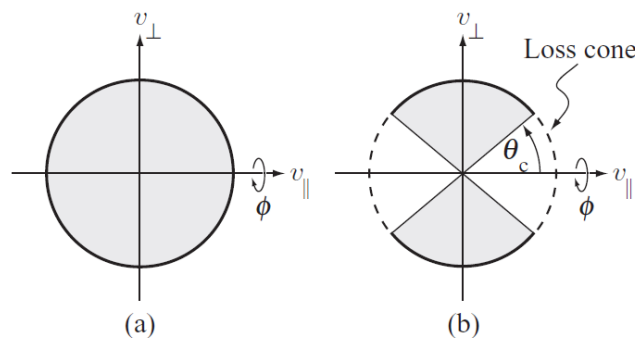
Possiamo così mettere in relazione l'angolo critico di pitch con la mirror ratio:

$$\sin^2 \theta_c = \frac{B_{min}}{B_{max}} = \frac{1}{R}$$

Inoltre possiamo scrivere il dominio delle particelle che rimangono, nel caso ideale, confinate per sempre, in funzione dell'angolo critico di pitch:

$$\theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c$$

Gli angoli che si trovano al di fuori di questo range formano il cosiddetto cono di perdita, ovvero la regione dello spazio delle velocità a cui appartengono le particelle che non subiscono il fenomeno del mirror effect da parte del campo magnetico e vengono così perdute.



**Figura 6.** Spazio delle velocità: (a) distribuzione isotropica delle particelle, (b) rappresentazione con cono di perdita.

Possiamo, come avevamo suggerito prima, scrivere la frazione di particelle confinate in funzione del parametro mirror ratio. Per farlo dobbiamo immaginare che ogni particella contenuta all'inizio nel volume di confinamento possa essere riflessa, e prendiamo quindi questa condizione come la condizione ideale di confinamento. Questa frazione, che è poi la totalità, la metteremo a confronto con la frazione che invece è realmente riflessa e confinata nel volume, per capire quale sia la percentuale di particelle che possono dare vita alla reazione di fusione:

$$f = \frac{\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} v^2 F_M(v) dv}{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} v^2 F_M(v) dv} = \sqrt{1 - \frac{1}{R}}$$

Dove  $F_M$  è la funzione di distribuzione maxwelliana che conta tutte le particelle isotropicamente distribuite nello spazio delle velocità iniziali, cioè tiene conto di tutti gli angoli di pitch iniziali. Sapendo così quanto vale il parametro di costruzione  $R$  della macchina, possiamo facilmente capire quale sia la percentuale di particelle riflesse e quindi confinate all'interno del nostro volume. Questo accade però in un sistema del tutto ideale, ma in un sistema reale le cose vanno diversamente. Abbiamo infatti trascurato un contributo importante che hanno le collisioni coulombiane tra le particelle, e che portano le stesse particelle ad entrare nel cono di perdita sebbene non abbiano inizialmente la velocità che rientra in quel range (si veda il riferimento bibliografico [4] per ulteriori spiegazioni). E quest'ultimo particolare porta l'intera struttura a fallire, poiché il rateo di perdita diventa insostenibile per la reazione di fusione. Non si riesce con una configurazione del genere ad avere un tempo di confinamento abbastanza lungo da permettere una reazione di fusione che sia, nell'economia totale del processo, vantaggiosa.

## 2.4. Considerazioni topologiche finali

Esiste però anche una spiegazione topologica all'effettivo problema degli specchi magnetici: infatti la configurazione magnetica, che si viene a creare mediante la disposizione geometrica degli avvolgimenti appena spiegata, è

sempre, in qualsiasi caso, una superficie omeomorfa alla sfera. Difatti la superficie entro cui il plasma tenta di essere confinato è una superficie bidimensionale senza bordo, con cavità, senza maniglie e orientabile, e per il **Teorema 4**, utilizzato nel precedente capitolo matematico, questa tipologia di superficie deve necessariamente essere classificata come una sfera. Ora, utilizzando tutte le nozioni apprese nel primo capitolo, possiamo immaginare la superficie sferica come una varietà sulla quale esiste un campo vettoriale continuo e tangente in ogni punto, e questo campo vettoriale è proprio il campo magnetico che crea il confinamento. In ogni punto possiamo infatti trovare un vettore che sia tangente alla superficie e che ricalchi intensità, direzione e verso del campo magnetico. Uno dei fondamentali risultati della nostra trattazione è proprio il teorema della palla pelosa, il quale asserisce che non può esistere un campo vettoriale continuo e tangente non nullo su una sfera, ovvero che su una superficie sferica bidimensionale deve necessariamente esistere almeno un punto critico nel quale la componente tangente del campo magnetico si annulla. È anche per questo che la tecnologia degli specchi magnetici non può essere un confinamento adeguato per la reazione di fusione controllata. Il campo magnetico che sviluppiamo conterrà sempre almeno un punto in cui il campo magnetico si annulla nella sua componente tangente, e quindi ogni particella che, nella sua traiettoria, vi transiti sopra non risente più di alcuna forza che le permette di seguire le linee del campo e, di conseguenza, si perde al di fuori del volume di confinamento. Ovviamente, perdere particelle cariche utili ai fini della fusione è deterrente per l'intero processo della fusione e comporta l'impossibilità di ottenere risultati vantaggiosi. Ora, per correttezza, dobbiamo ammettere che non basta definire la superficie esterna del volume di confinamento per poter pensare di aver definito l'intera struttura del plasma, poiché al suo interno non possiamo essere certi che non vi siano superfici create dal campo magnetico diverse dalla sfera. La conformazione del plasma è però strutturata in modo tale che, nella sua configurazione di equilibrio, in accordo con le equazioni della magnetofluidodinamica stazionaria (si veda il riferimento bibliografico [4]), le superfici a pressione costante sono l'una compresa entro l'altra e che le superfici su cui giace il campo magnetico (ovvero sulle quali il campo  $\mathbf{B}$  è tangente) coincidono proprio con queste superfici a pressione costante. Per questo motivo basta



analizzare la superficie più esterna per poter generalizzare il risultato a tutto il volume, ovvero a tutto il campo magnetico di confinamento tridimensionale. Praticamente possiamo immaginare che le varietà sferiche, su cui applichiamo il teorema della palla pelosa, siano l'una concentrica all'altra, e dunque ogni superficie sarà ugualmente soggetta all'impossibilità di disporre di un campo vettoriale continuo e tangente non nullo. Così ogni superficie avrà almeno una singolarità, dove la componente tangente del campo magnetico si annulla e il confinamento perde così la sua efficacia.

Proprio per questi motivi la tecnologia di confinamento attraverso gli specchi magnetici fu accantonata nel passato. Ha preso piede invece, grazie agli iniziali sforzi di fisici sovietici, che già negli anni '50 avevano teorizzato la tecnologia, il confinamento mediante la macchina di nome Tokamak. Tokamak è un acronimo di origine russa, per l'appunto, che significa "camera toroidale con spire magnetiche". Il concetto base di questa tecnologia è proprio la sua configurazione toroidale. La varietà bidimensionale denominata toro è, come abbiamo visto nel capitolo matematico, una superficie con caratteristica di Eulero uguale a zero, e dunque può esistere su di essa un campo vettoriale continuo e tangente non nullo. In pratica, possiamo immaginare di avere un campo magnetico senza singolarità, e dunque senza perdite indesiderate di particelle, sulla superficie di confinamento. Questa tecnologia ha soppiantato la configurazione a specchi magnetici, e difatti i nuovi progetti mondiali, ITER e il suo successore ancora in fase di approvazione DEMO, sulla ricerca di un confinamento per la fusione termonucleare si basano su tecnologie a forma toroidale. La forma toroidale garantisce quindi la possibilità, nel caso ideale, di avere un ottimo confinamento delle particelle del plasma grazie solamente alla sua caratteristica geometrica e topologica. Volendo essere del tutto corretti, anche la configurazione toroidale ha problemi nel confinamento, poiché la geometria toroidale distorce il campo magnetico creando delle forze che tendono a espandere il volume, sebbene siamo in una situazione di campo magnetico costante. Essenzialmente le forze che si creano sono tre, ovvero la hoop force, the tire tube force e la  $1/R$  force, e che tendono, tutte e tre, ad espandere il toro verso la sua superficie esterna, e a cui bisogna porre rimedio con un ulteriore campo magnetico verticale esterno.



# Capitolo 3

## Applicazione del teorema della palla pelosa all'anisotropia dei superconduttori di tipo-II

I riferimenti per questo capitolo sono le fonti [5] e [6].

In questo breve capitolo tratteremo l'applicazione del teorema della palla pelosa in un ambito ancora differente rispetto al confinamento magnetico, ma che ha un chiaro rimando alla struttura di un reattore nucleare. Infatti applicheremo il teorema alla disposizione del flusso magnetico nei superconduttori di tipo-II. I superconduttori, soprattutto nei progetti più recenti, sono parte integrante della struttura di un reattore nucleare, in quanto hanno il compito di creare il campo magnetico di confinamento, di cui nei capitoli precedenti abbiamo parlato. Nel progetto ITER, per esempio, le bobine preposte alla generazione del campo magnetico di confinamento sono costituite da avvolgimenti superconduttivi realizzati mediante fili compositi, con leghe di NbTi e composti di Nb<sub>3</sub>Sn, che costituiscono il superconduttore, inserite in fili contenenti stabilizzatore di rame. I materiali superconduttori sono caratterizzati dalla possibilità di condurre corrente senza alcuna resistenza in corrente continua. Tale fenomeno è dovuto ad un'interazione quantistica tra gli elettroni e il reticolo cristallino, che non è spiegabile dalla fisica classica. È molto importante, in un settore di alta tecnologia come la reazione termonucleare controllata, poter disporre di strutture che permettano un bilancio volto al guadagno in termini energetici, anche perché sarebbe inutile avere una struttura che consuma, per funzionare, più energia di quella che produce. Al momento la ricerca in questo campo sta tentando di giungere ad un bilancio energetico attivo in modo continuo, che si crede

di riuscire a soddisfare con il progetto, ancora in fase di definizione, DEMO, successore del progetto, ora in costruzione, ITER, il quale ha già un bilancio attivo ma solo per brevi impulsi e non per periodi lunghi. Ed è per questo che la perfetta efficienza di tutte le parti che compongono la struttura è un obiettivo da perseguire. Così è necessario che anche l'avvolgimento che crea il campo magnetico di confinamento sia energeticamente efficiente, e per questo si fa uso dei superconduttori. Non ci dilungheremo su tutte le problematiche dei superconduttori perché non sarebbero inerenti alla tesi proposta, ma ci focalizzeremo, dopo questa brevissima introduzione generale, sull'applicazione del teorema della palla pelosa alla conformazione dei vortici magnetici che vengono a crearsi all'interno del superconduttore. Tutta la trattazione di questo capitolo prende spunto da un articolo di Nature di due fisici inglesi (fonte bibliografica [5]), Mark Laver e Edward Forgan, e probabilmente è l'unico articolo scientifico che tenta un simile approccio al problema, ovvero un approccio topologico mediante l'applicazione del teorema della palla pelosa.

### **3.1. Cenni sui materiali superconduttori di tipo-II**

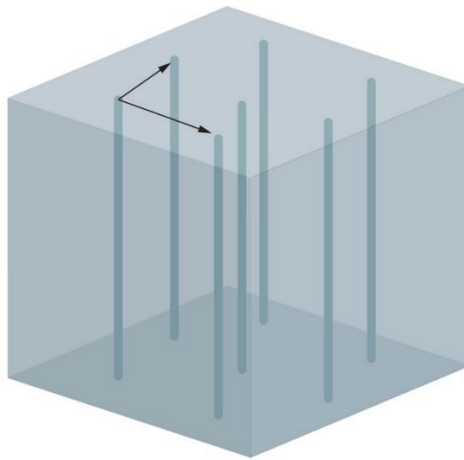
Prima di iniziare la trattazione, dobbiamo introdurre il concetto di superconduttore di tipo-II, questo perché è parte fondamentale per la comprensione dell'intero capitolo. L'articolo di Nature, infatti, applica il teorema della palla pelosa solamente a questa tipologia di superconduttori. I superconduttori di tipo-II presentano temperature critiche, ovvero temperature di transizione allo stato di superconduzione, "alte" (solitamente superiori ai 20 K). Ulteriore caratteristica è la presenza di due valori critici per il campo magnetico: il primo valore è l'intensità critica del campo magnetico esterno, oltre il quale il campo magnetico penetra nel superconduttore attraverso vortici di superconduttore, che prendono il nome di flussoidi, disposti in una struttura esagonale ordinata. Il secondo valore, molto più alto, indica l'intensità critica del campo magnetico esterno oltre la quale il superconduttore transisce allo stato normale. All'interno delle zone del superconduttore occupate dai flussoidi, il materiale si trova allo stato normale. Ogni flussoido è caratterizzato da una parte quantizzata del flusso esterno totale, per cui ad ogni cella esagonale appartiene un flusso  $\Phi_0 =$

$h/2e$  ( $h$  è la costante di Planck ed  $e$  la carica dell'elettrone). Questo fenomeno è molto importante per quanto riguarda la nostra trattazione, perché è sempre presente un intenso campo magnetico esterno ai superconduttori delle bobine che hanno il compito di creare il confinamento magnetico.

## 3.2. Corpo centrale dell'articolo

Possiamo ora introdurre il problema dell'anisotropia della forma delle celle che i flussoidi creano nel disporsi all'interno del materiale superconduttore. Nella letteratura, si tende a ritenere che i flussoidi si dispongano disordinatamente per alcune direzioni del campo magnetico per un qualche fenomeno fisico del cristallo superconduttore. Lo scopo dell'articolo è proprio quello di rivelare che devono necessariamente esistere alcune direzioni del campo magnetico per le quali la disposizione dei vortici non è esagonale, ma una disposizione disordinata. A tale fenomeno è possibile fornire una spiegazione topologica, correlata al teorema della palla pelosa. L'intero articolo si basa sullo studio del niobio superconduttore, ma i risultati sono probabilmente generali. L'idea è quella di far ruotare relativamente il campo magnetico rispetto al campione di niobio superconduttore (relativamente perché in questo caso verrà fatto ruotare il provino rispetto al campo magnetico fisso) e, mediante un diffrattometro e una macchina per lo scattering di neutroni a bassi angoli individuare la posizione dei vortici nel superconduttore (per il funzionamento, si rimanda all'articolo [5]). Se immaginiamo di mantenere il campo magnetico esterno alla medesima intensità durante ogni variazione di direzione, allora possiamo anche immaginare che ogni vortice potrà essere rappresentato da una freccia della medesima lunghezza, con direzione diversa dalle precedenti. L'involuppo delle punte di queste frecce, qualora si dipartano tutte da uno stesso punto nello spazio, crea una perfetta superficie sferica che è la sfera del teorema della palla pelosa. Se si osservano i vortici parallelamente alla loro direzione, come fanno nell'articolo i due fisici, essi, per quanto disordinati, assumono una disposizione descrivibile sempre attraverso due vettori che poggiano sul piano perpendicolare alla direzione dei vortici (si veda la **Figura 1**). Questi due vettori diventano ovviamente tangenti (poiché appartenenti al piano

perpendicolare) ai flussoidi del superconduttore, e quindi tangenti alla superficie sferica creata dalla rotazione relativa dei flussoidi stessi. Pertanto, tali vettori costituiscono i peli del teorema della palla pelosa, o per meglio dire, non sono altro che il campo vettoriale tangente alla sfera nel teorema della palla pelosa. In accordo con questo teorema, il campo vettoriale deve necessariamente avere una singolarità, cioè non può essere continuo e non nullo in ogni suo punto.



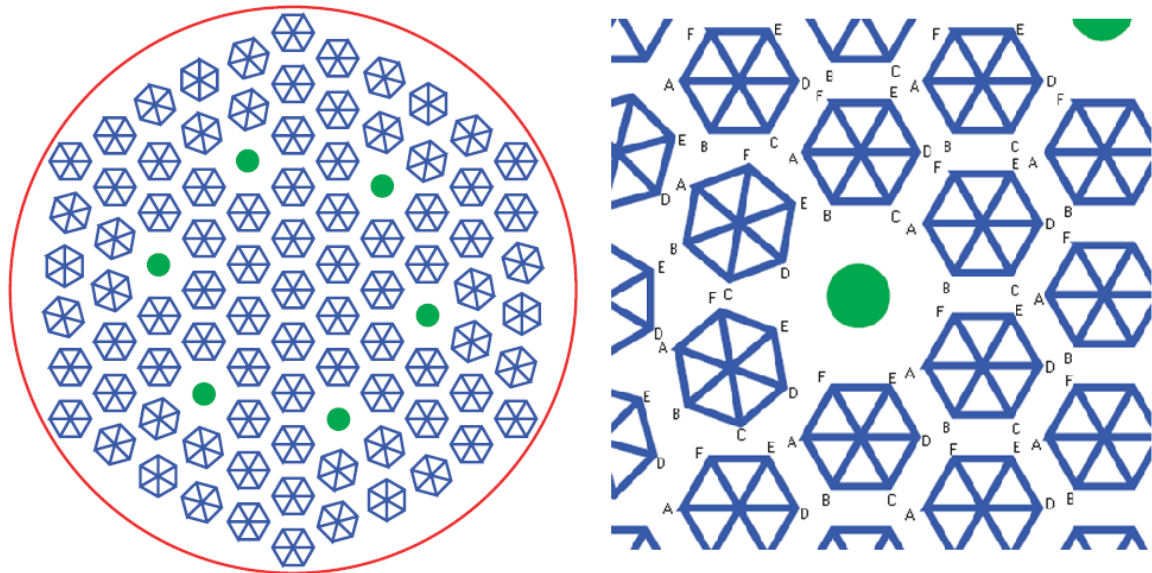
**Figura 1.** La disposizione dei vortici (le linee verticali) può essere descritta da una base di due vettori (le frecce nere)

La spiegazione dell'anisotropia del reticolo dei vortici, con direzioni nelle quali lo stesso reticolo perde la regolarità esagonale (o di sei celle triangolari affiancate a formare un esagono), dunque, è proprio questa, e, come si nota, è essenzialmente una spiegazione topologica. Ovviamente la spiegazione fisica deve esistere, e consta nel fatto che il superconduttore ha un proprio reticolo cristallino interno che definisce necessariamente alcune direzioni preferenziali, mentre per altre direzioni si creano queste strutture disordinate dei flussoidi. Più che una spiegazione topologica, il teorema della palla pelosa è, in effetti, una causa topologica dell'anisotropia del reticolo dei vortici. Praticamente il teorema non spiega il perché il superconduttore disponga il proprio reticolo in quello o in quell'altro modo, ma assicura che esistano necessariamente direzioni in cui il reticolo perde la propria disposizione regolare.

### 3.3. Soluzioni all'anisotropia dei reticoli dei vortici

L'articolo continua descrivendo le soluzioni che per natura il superconduttore adotta per far fronte a questo problema dell'anisotropia. Sono rappresentati tre casi:

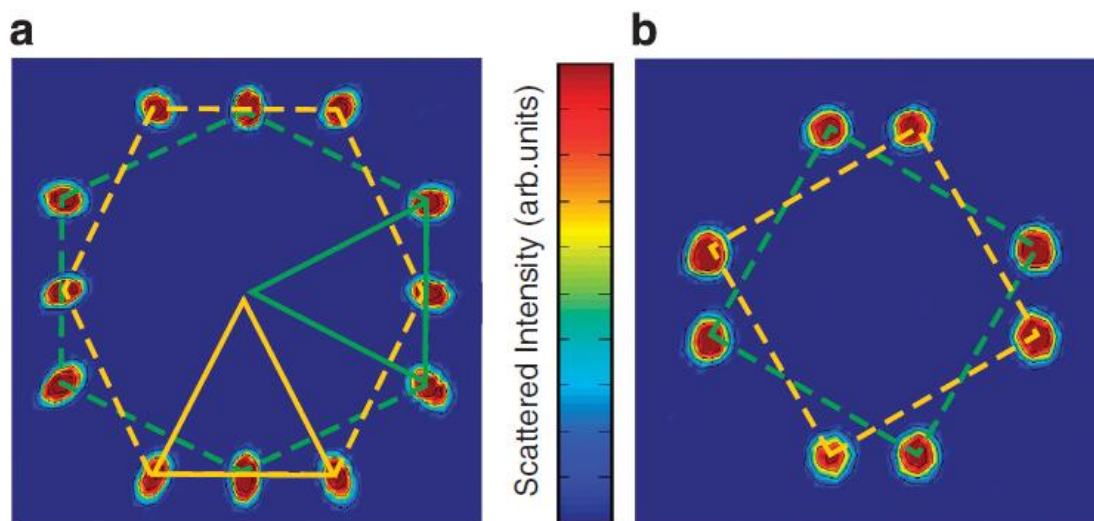
- (i) Il primo caso rappresenta la possibilità da parte del materiale di disporre il reticolo dei vortici irregolarmente per alcune direzioni del campo magnetico, in maniera molto banale. Queste direzioni particolari sono quelle per cui il materiale presenta delle impurità nel proprio reticolo cristallino, e quindi si determinano difficoltà a mantenere la regolarità anche della struttura geometrica in cui si dispongono i flussoidi.
- (ii) Il secondo caso, invece, mostra la possibilità di creare due reticoli di vortici con la stessa forma ma con diversa orientazione che si compenetrano l'uno con l'altro. In realtà, come è stato osservato, possono esistere anche più di due reticoli che si compenetrano tra loro, formando strutture molto complicate. Essenzialmente, questa compenetrazione dei reticoli porta alla delocalizzazione delle singolarità, che possono dividersi in più singolarità ravvicinate i cui winding numbers non sono interi ma frazionari. E questa suddivisione può esistere solo se immaginiamo le celle dei vortici che ruotano intorno al punto critico, al posto delle frecce che collegano un vortice ad un altro, come già menzionato nella prima parte di questo capitolo (si veda l'esempio nella **Figura 2**).



**Figura 2.** Esempio di delocalizzazione di una singolarità sulla superficie di un disco. Ogni singolarità (i punti verdi nella figura) ha winding number uguale a  $+1/6$ , perché, come si vede nell’ingrandimento a destra, compiuto un giro intero intorno alla singolarità l’esagono si sovrappone a se stesso ma con una rotazione di  $1/6$  di angolo giro.

- (iii) Infine, il terzo modo con cui il materiale riesce a soddisfare il teorema della palla pelosa è quello di modificare la forma del reticolo dei vortici con discontinuità. Praticamente esistono direzioni per le quali il provino di niobio crea dei reticoli con quadrati che si compenetrano, mentre, non appena si ruota il campo magnetico esterno rispetto al provino, il reticolo assume la forma classica esagonale, o, per altre direzioni particolari, come abbiamo già visto, i reticoli esagonali si compenetrano creando due domini reticolari diversi e distinguibili (si veda la **Figura 3**).





**Figura 3.** Disposizione dei reticoli dei vortici. La direzione del campo magnetico è normale al foglio. Nella figura **a** si notano le due celle esagonali che si compenetrano, nella figura **b** invece i due domini quadrati.

### 3.4. Conclusioni

Possiamo concludere che, come abbiamo visto, la rottura della simmetria del reticolo dei vortici deve necessariamente accadere quando facciamo ruotare relativamente un superconduttore entro un campo magnetico costante, e che esistono delle soluzioni, elencate sopra, con cui la natura intrinseca del materiale tenta di mantenere le capacità del superconduttore e, contemporaneamente, di soddisfare il teorema della palla pelosa. L'applicazione del teorema al problema fisico dell'anisotropia del reticolo dei vortici magnetici all'interno di un superconduttore costituisce il principale contributo scientifico dell'articolo dei due fisici inglesi. Infatti, se prima potevamo immaginare che ogni superconduttore avesse direzioni particolari per le quali il campo magnetico rompesse la disposizione ordinata del reticolo, ora siamo certi che questo dovrà necessariamente accadere in ogni superconduttore, qualsiasi sia la sua struttura molecolare interna.



# Bibliografia

- [1] L. Christine Kinsey. *Topology of Surfaces*. Springer-Verlag (1993)
- [2] C. Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli (1988)
- [3] P.J. Giblin. *Graphs, Surfaces and Homology*. Chapman and Hall (1977)
- [4] J. Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press (2007)
- [5] M. Laver e E. M. Forgan. *Magnetic flux lines in type-II superconductors and the 'hairy ball' theorem*. Nat. Commun. 1:45 doi: 10.1038/ncomms1047 (2010)
- [6] <http://www.psi.ch/media/what-the-hairy-ball-theorem-tells-us>. P. Piwnicki, *What the "hairy ball" theorem tells us about flux lines in superconductors*. (2010)