

Geometria dei problemi ellittici sovradeterminati

Per problema ellittico sovradeterminato si intende un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2 \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ |\nabla u| = K & \text{su } \partial\Omega \end{array} \right.$$

dove f è una funzione $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e K è una costante. Questi problemi appaiono in maniera naturale in Matematica applicata, perchè rappresentano la condizione di equilibrio di alcuni fenomeni fisici. Negli ultimi anni è stato scoperto un sorprendente parallelismo tra tali problemi e le superfici minime o di curvatura media costante, che ha permesso di ottenere alcuni risultati di classificazione per i problemi ellittici sovradeterminati a partire dalla geometria delle superfici. Nello stesso tempo, sempre ispirandosi al caso delle superfici, sono state costruite nuove soluzioni del tutto inattese.

In questo seminario, farò una presentazione generale di questo tema, e mi soffermerò su un risultato di rigidità per problemi ellittici sovradeterminati in \mathbb{R}^2 che ho ottenuto in collaborazione con A. Ros e D. Ruiz, e che risponde ad un problema enunciato da Berestycki, Caffarelli e Nirenberg nel 1997.