Da uno spazio vettoriale V si ricava il sistema dei sottospazi lineari L, ordinato per inclusione, e l'anello degli endomorfismi R.

Escludendo $\dim(V) < 3$, e con cura se $\dim(V) = 3$, seguendo von Staudt da L si ricostruisce V, e seguendo Birkhoff / Menger si caratterizza L, ma NON si ha una equivalenza.

Generalizzando a moduli (o oggetti abeliani) V tali che ogni endomorfismo ha nucleo e immagine sommandi diretti, seguendo von Neumann si ha una equivalenza tra R e L, che si caratterizzano come anelli con inversa generalizzata (ogni x ha un y tale che $xyx = x$) e reticoli modulari complementati, con un sistema di unità matriciali di ordine $n > 2$ in R e una base omogenea di ordine n in L (arguesiano se $n = 3$). Il contesto generale chiarisce che V si ricostruisce solo a meno di equivalenze di Morita.

[[In tale equivalenza, gli L completi e $\wedge$-continui (intersecare con un elemento conserva i limiti monotoni) corrispondono agli R autoiniettivi a destra (ogni mappa R-lineare da un ideale destro a R è moltiplicazione sinistra per un elemento). Lo studio di tale caso equivale (nel senso di [2] sotto) allo studio delle categorie Ab5 spettrali di Grothendieck. La teoria della decomposizione e dimensione è come quella in [1] sotto (anzi, esiste una teoria comune).]]

L'equivalenza di von Neumann è archetipica per studiare altri casi. Due sono notevoli:

[1] Partendo da uno spazio di Hilbert H, si ha una equivalenza tra gli anelli con involuzione A di operatori lineari continui tali che $A = A''$ (dove X' indica l'anello degli operatori che commutano con ogni x in X) e gli associati poset con involuzione $P(A)$ delle proiezioni (idempotenti autoaggiunti, ordinati per divisibilità $ef = e$, con $1-e$ ortocomplemento di e), sempre escludendo i casi in cui una immagine omomorfa sia del tipo escluso sopra per V. Per i fondamenti logici della meccanica quantistica (i casi esclusi hanno intepretazione logico - quantistica della loro esclusione), von Neumann era particolarmente interessato al sottocaso indecomponibile ($e = 0, 1$ sono le uniche proiezioni che danno una decomposizione diretta) e "finito" ($xy = 1$ implica $yx = 1$ in A, ovvero $P(A)$ è modulare): von Neumann caratterizza $P(A)$ come geometria continua con ortogonalità che permette libera mobilità e univocamente determina una probabilità di transizione; A è l'anello degli elementi limitati (sottoanello generato dalle proiezioni) dentro l'anello R associato a $L = P(A)$.

[[Problema: estendere caratterizzazione agli altri A; usare l'R dei quozienti destri massimali di A con l'operazione unaria in R che a x associa la massima proiezione e che annulla x (Ker(e) contiene Imm(x)), ovvero l'operazione "esterno ortogonale" indotta in L]]

[2] Altri tipi di moduli (o oggetti abeliani) V ammettono una equivalenza come sopra, per esempio il caso di Baer - Inaba - Jónsson / Monk dei moduli su anelli artiniani a ideali principali, caso che che include i gruppi abeliani finiti e gli spazi vettoriali finito dimensionali con l'azione di una trasformazione lineare o antilineare.

[[Problema: tra le estensioni comuni di von Neumann e Baer che Hutchinson produce come sotto a profusione, individurane una in cui i singoli V si ricostruiscono a meno di equivalenze di Morita e gli L, R abbiano una caratterizzazione interessante.]]

Se l'equivalenza per un singolo V è rara, accade invece sempre che una catagoria abeliana di vari V si ricostruisca dal reticolo associato. Il risutato finale (combinando

Freyd - Mitchell per categorie abeliane e il teorema di G. Hutchinson per i reticoli) è che tre teorie in tre diversi linguaggi permettono di fare le stesse cose:

(algebra lineare classica) moduli su un anello

(algebra lineare moderna) categorie abeliane

(geometria d'incidenza sintetica moderna) reticoli modulari con 0 in cui gli elementi sono raddoppiabili: $\forall x \exists y, z$: $x \vee y = y \vee z = z \vee x \;\;\&\;\; x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 0$