L'integrale di Cauchy in $\mathbb{C}^n$

Loredana Lanzani
University of Arkansas e Syracuse University

Abstract. In questo seminario presentero' una sintesi di un programma di ricerca in collaborazione con E. M. Stein riguardo l'estensione a piu' dimensioni dei famosi risultati dimostrati da Calderón e da Coifman-McIntosh-Meyer riguardo l'integrale di Cauchy per una curva lipschitziana nel piano (interpretata come la frontiera di un dominio lipschitziano $D \subset \mathbb{C}$).

Dal punto di vista dell'analisi complessa, una caratteristica fondamentale del nucleo di Cauchy per una curva piana:

$$H(w,z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dw}{w-z}, \quad w, z \in \mathbb{C}, \quad w \neq z$$

e' il fatto che $H(w,z)$ e' olomorfo (analitico) come funzione del parametro $z \in D \subset \mathbb{C}$. Una delle differenze fondamentali tra la teoria per il piano complesso ($z \in D \subset \mathbb{C}$) e la teoria per lo spazio euclideo in piu' dimensioni ($z \in D \subset \mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$) e' che in piu' dimensioni non esiste una generalizzazione canonica di $H(w,z)$ che sia olomorfa in $z \in D \setminus \{z = w\} \subset \mathbb{C}^n$. La spiegazione di questo fenomeno risale al fatto che in piu' variabili ci sono ostacoli di natura geometrica (il cosiddetto *problema di Levi*) che in dimensione complessa $n = 1$ sono irrilevanti.

Un buon candidato per la dimensione complessa $n \geq 2$ fu individuato da J. Leray nella categoria dei domini geometricamente convessi e lisci (con frontiera di classe C^∞); l'ipotesi sulla regolarita' della frontiera puo' essere facilmente ricondotta alla classe C^2, ma non appena la regolarita' della frontiera e' inferiore alla classe C^2 la costruzione di Leray presenta difficolta' di natura concettuale (e non piu' soltanto di natura tecnica).

In questo seminario discutero' *(a)*, la costruzione del nucleo di Cauchy-Leray, e *(b)*, la regolarita' nella classe di Lebesgue $L^p(bD)$ dell'integrale singolare indotto da tale nucleo sotto le piu' deboli ipotesi attualmente note sulla frontiera bD. Nel caso del piano ($D \subset \mathbb{C}$) queste ipotesi sono analoghe alla condizione che la frontiera sia lipschitziana, ma in piu' variabli ($n \geq 2$) le ipotesi che formuleremo sono ottimali. Le dimostrazioni si basano su una versione ad-hoc del cosiddetto "Teorema $T(1)$" in analisi armonica reale.

Discutero' anche varie applicazioni di questi risultati alla teoria delle funzioni di piu' variabili complesse (in particolare, la regolarita' della proiezione di Bergman e della proiezione di Szegő).

References

[C] Calderón A. P, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. **74** no. 4, (1977) 1324-1327.

[CMM] Coifman R., McIntosh A. and Meyer Y., *L'intègrale de Cauchy dèfinit un opèrateur bornè sur L^2 pour les courbes lipschitziennes* Ann. of Math. **116** (1982) no. 2, 361 - 387.