

Freie Universität Berlin, SoSe 2020

Andrea Petracchi, Funktionentheorie =

Theorie der Funktionen.

Welche Funktionen? Holomorphe Funktionen! Sie sind die komplex-differenzierbaren Funktionen.

$$\underline{f'(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Alle sind komplexe Zahlen.

"komplexe Ableitung"

Da die reelle Dimension von $\mathbb{C}$ 2 ist, haben die holomorphen Funktionen strengere Eigenschaften, als die reell-differenzierbaren Funktionen. z.B.: holomorphe Funktionen sind C^∞ , d.h. unendlich oft differenzierbar (glatt/smooth).

Genauer: wenn eine komplexe Funktion in einer komplexen Variablen die komplexe Ableitung hat, dann hat sie unendliche komplexen Ableitungen.

Beispiele holomorpher Funktionen: Polynome, Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$. Wir werden sehen, dass jede holomorphe Funktion in der Form $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dargestellt werden kann. (Jede holomorphe Funktion ist analytisch).

Logarithmus und Wurzeln von komplexen Zahlen? Sie verdienen eine besondere Behandlung. Das Problem ist, dass $\mathbb{C}$ zweidimensional ist. Wir brauchen einige Mittel von Topologie (Homotopietheorie).

Einleitender Lehrplan:

- Komplexe Zahlen [Freitag-Busam §I.1]
- Grundlagen von Topologie [Jänig §1], [Manetti §1-4, 6]
- Holomorphe Abbildungen [FB §I.4-5], [Cartan II.2.1-2]
- Potenzreihen und analytische Abbildungen [FB §III.2], [Cartan I]
- Homotopie und Fundamentalgruppe [Jänig §5, §9], [Manetti 10, 11, 12]
- 1-Formen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ [mein Skript]
- Eigenschaften holomorpher Funktionen: Goursat, Cauchyscher Integralsatz, jede holomorphe Funktion ist analytisch, Liouville, Laurentzerlegung, Residuen, Rouché, Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes [FB II-III], [Cartan I-III]

Wenn wir Zeit haben:

- Geometrische Eigenschaften holomorpher Abbildungen [Cartan VI.1-2]
- Riemannsche Kugel, Riemannsche Fläche [Cartan VI.5]

Voraussetzungen

- Lineare Algebra
- Analysis in einer reellen Variablen
- Analysis in mehreren reellen Variablen: nur partielle Ableitung und Differenzierbarkeit
- Ein bisschen Vertrautheit mit Metrischen Räume

Wünschenswerte Voraussetzungen

- Vertrautheit mit topologischen Räume, Zusammenhang, Kompaktheit, Banachräume
- Kurvenintegrale längs stückweise C^1 Kurven in $\mathbb{R}^n$