

Komplexe Zahlen

Def Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist der $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis $\{1, i\}$.

Eine komplexe Zahl ist $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist injektiv, deshalb $\mathbb{R}$ ist
 $a \mapsto a+0i$

mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ gleichgesetzt: $a = a+0i$
 $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$:

Addition $(a_1+b_1i) + (a_2+b_2i) := (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i$

Skalarmultiplikation $c \cdot (a_1+b_1i) := (ca_1) + (cb_1)i$

$\forall a_1, a_2, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$.

Wir definieren eine andere Verknüpfung in $\mathbb{C}$:

$$\text{Produkt } (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$
$$\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Es ist kompatibel mit Skalarmultiplikation: versuchen Sie $b_1 = 0$.

$$i = 0 + 1i. \text{ Wir haben } i \cdot i = -1, \text{ auch } (-i) \cdot (-i) = -1.$$

$$(2 + 3i) \cdot (1 + i) = (2 - 3) + (2 + 3)i = -1 + 5i.$$

Welche Eigenschaften hat $\mathbb{C}$ mit der Addition $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und dem Produkt $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$?

• $(\mathbb{C}, +)$ ist eine Abelsche Gruppe: Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Neutrales Element $0 = 0 + 0i$, Inverses Element $-(a+bi) = -a - bi$.

• $(\mathbb{C}, \cdot)$: Assoziativität: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
Kommutativität: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Neutrales Element: $1 = 1 + 0i$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

• Distributivgesetz: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

Deshalb $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist ein Ringhomomorphismus.
 $a \mapsto a + 0 \cdot i$

Def Wenn $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,

x ist der REALTEIL von z .

y ist der IMAGINÄRTEIL von z .

Bezeichnung: $\underline{\text{Re } z} := x$
 $\underline{\text{Im } z} := y$

Def Wenn $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ist die zu z KONJUGIERT KOMPLEXE ZAHL
 $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Bem $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \bar{z}$ ist ein Ringhomomorphismus

Bem $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \geq 0$

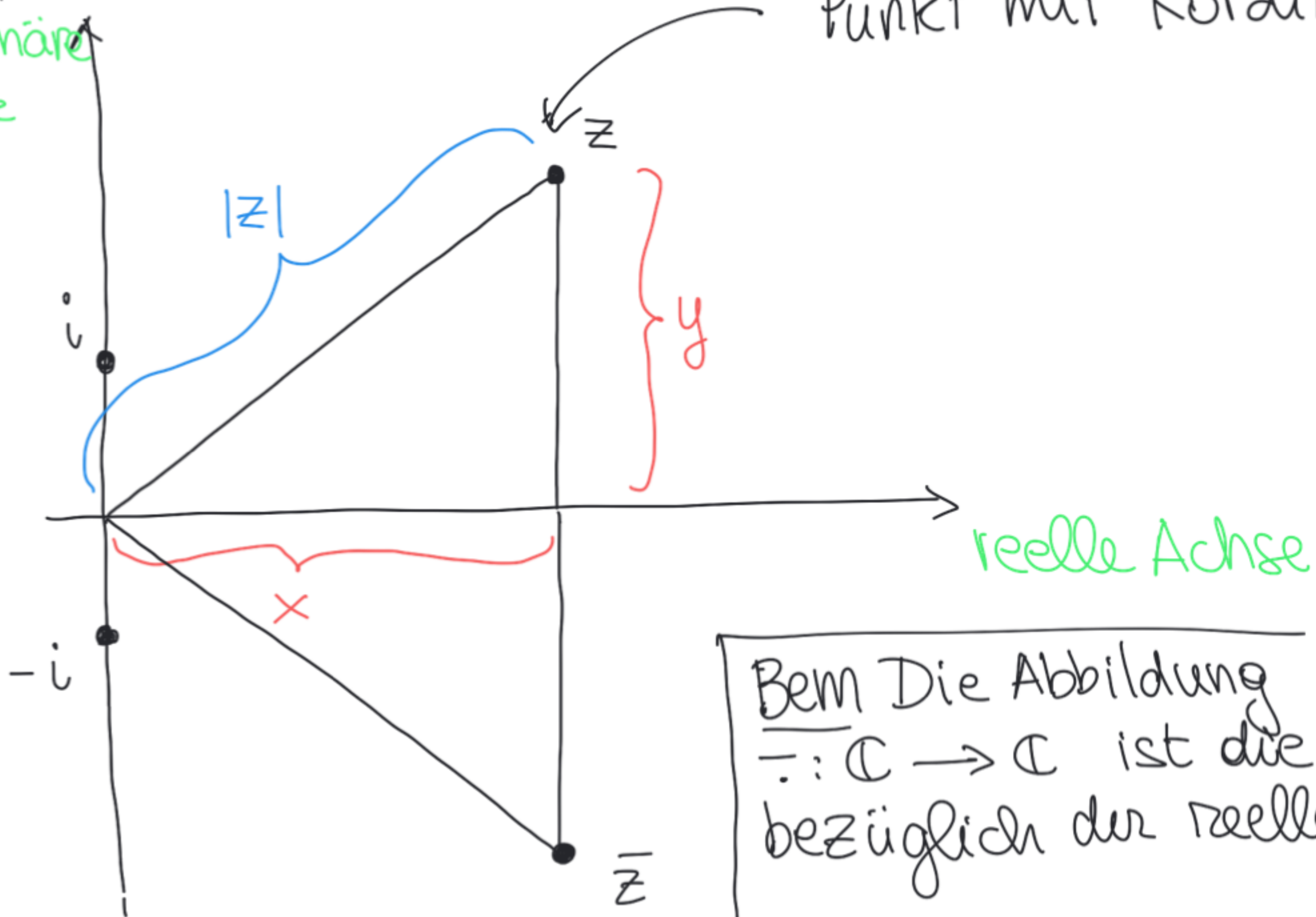
Def Der BETRAG (norm/modulus) von $z \in \mathbb{C}$ ist
 $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R} \geq 0$ man kann das machen, weil $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R} \geq 0$

Bem $\forall z, w \in \mathbb{C}$
 $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
 $|z \pm w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung
 $|z \pm w| \geq ||z| - |w||$
 $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$$z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

imaginäre
Achse

Punkt mit Koordinaten (x, y)



Bem Die Abbildung
 $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Reflexion
 bezüglich der reellen Achse

Satz $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper (field)

Bws Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat ein multiplikatives Inverse:

$$w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \text{ So } z \cdot w = z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1. \quad \square$$

Bem $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist eine Gruppe mit $\cdot$.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist eine galoissche Körpererweiterung mit Grad 2.

Die zugehörige Galoisgruppe ist

$$\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{ \text{id}_{\mathbb{C}}, \bar{\cdot} \}$$

Bem $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X] / (X^2 + 1)$

Exponentialfunktion

Def Wenn $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann

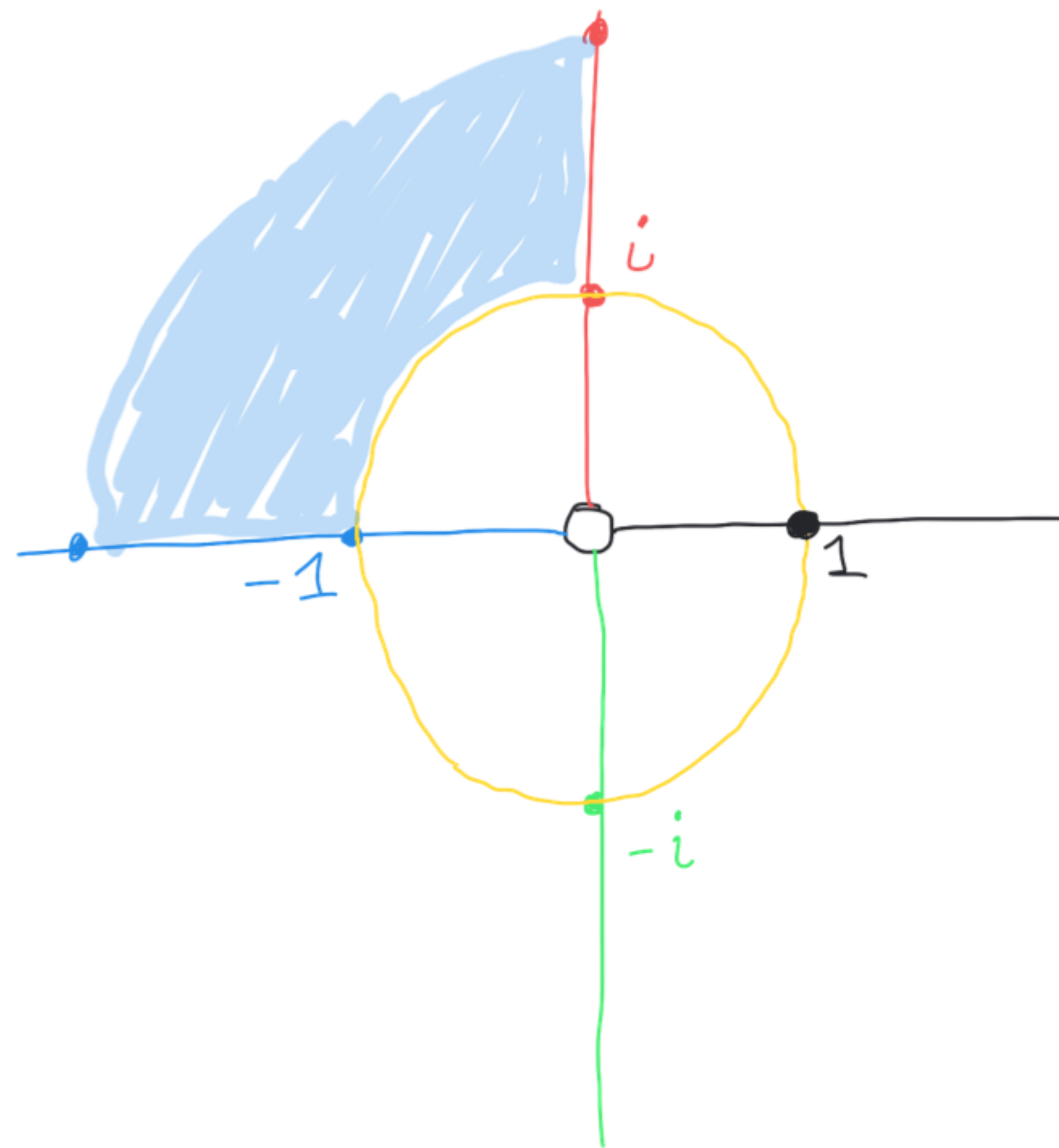
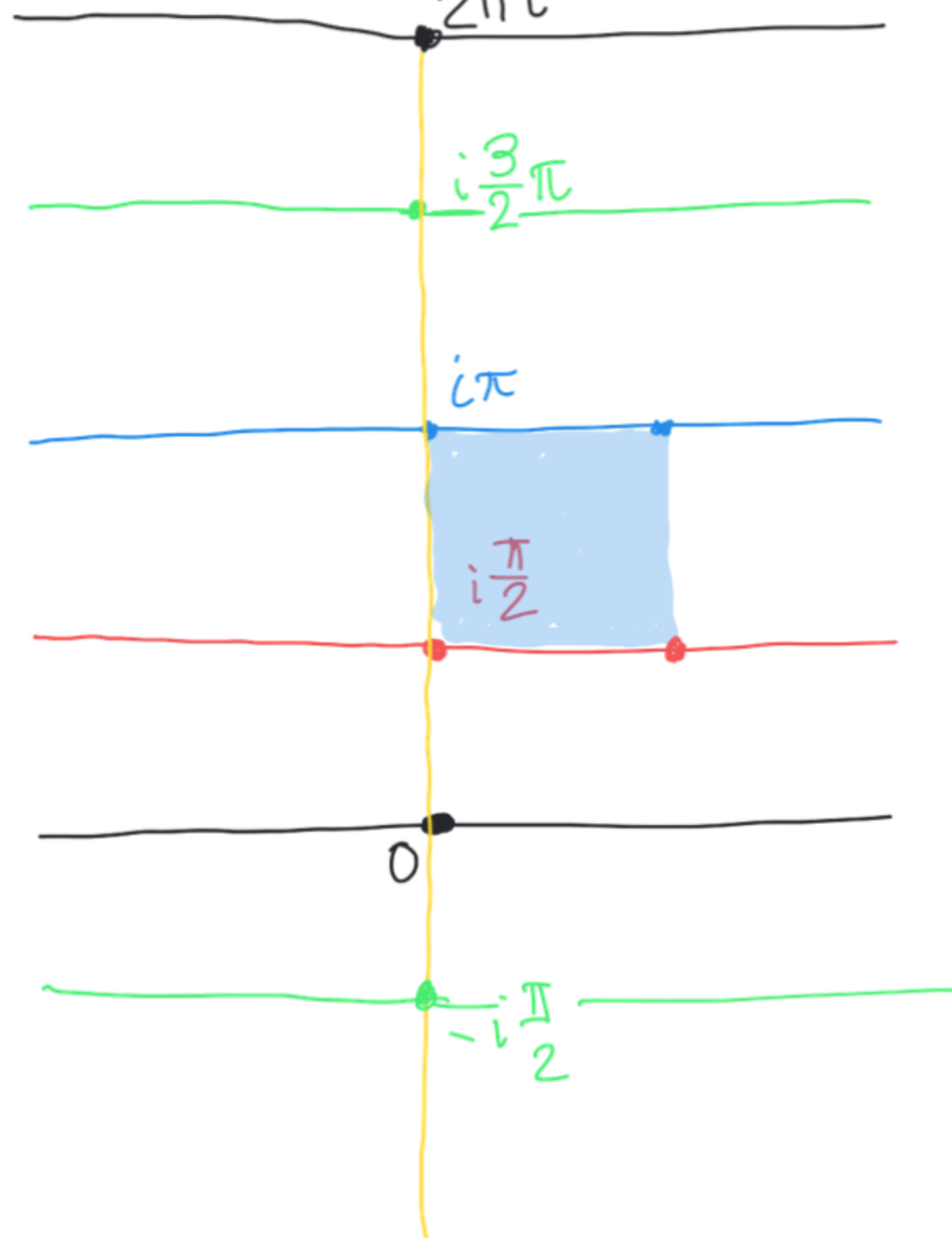
$$\underline{e^z} := \underline{\exp(z)} := e^x (\cos y + i \sin y) \in \mathbb{C}.$$

Beispiele $e^0 = 1$, $e^{5+\pi i} = e^5 (\cos \pi + i \sin \pi) = -e^5$, $e^{\pi i} = -1$,
 $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\log 2 + \frac{\pi}{2} i} = 2i$

Satz $\forall z, w \in \mathbb{C}$,

- $e^z \neq 0$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
- $|e^z| = 1 \iff \operatorname{Re} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}i$ "z ist rein imaginär"
- $e^z \in \mathbb{R} \iff \sin \operatorname{Im} z = 0 \iff \operatorname{Im} z \in \mathbb{Z}\pi \iff z \in \mathbb{R} + \mathbb{Z}\pi i$
- $e^z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \begin{cases} \sin \operatorname{Im} z = 0 \\ \cos \operatorname{Im} z > 0 \end{cases} \iff \operatorname{Im} z \in 2\pi\mathbb{Z} \iff z \in \mathbb{R} + 2\pi i\mathbb{Z}$
- $e^z = 1 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \sin \operatorname{Im} z = 0 \\ \cos \operatorname{Im} z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \iff z \in 2\pi i\mathbb{Z}$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$



Satz $\exp: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus:
 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

BWS $z_j = x_j + iy_j$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j=1,2$ - $e^{z_j} = e^{x_j}(\cos y_j + i \sin y_j)$

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)i] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + \sin(y_1+y_2)i] \\ &= e^{(x_1+x_2) + (y_1+y_2)i} = e^{z_1+z_2}. \quad \square \end{aligned}$$

Kor $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad (e^z)^n = e^{n \cdot z}.$