

Polar Darstellung

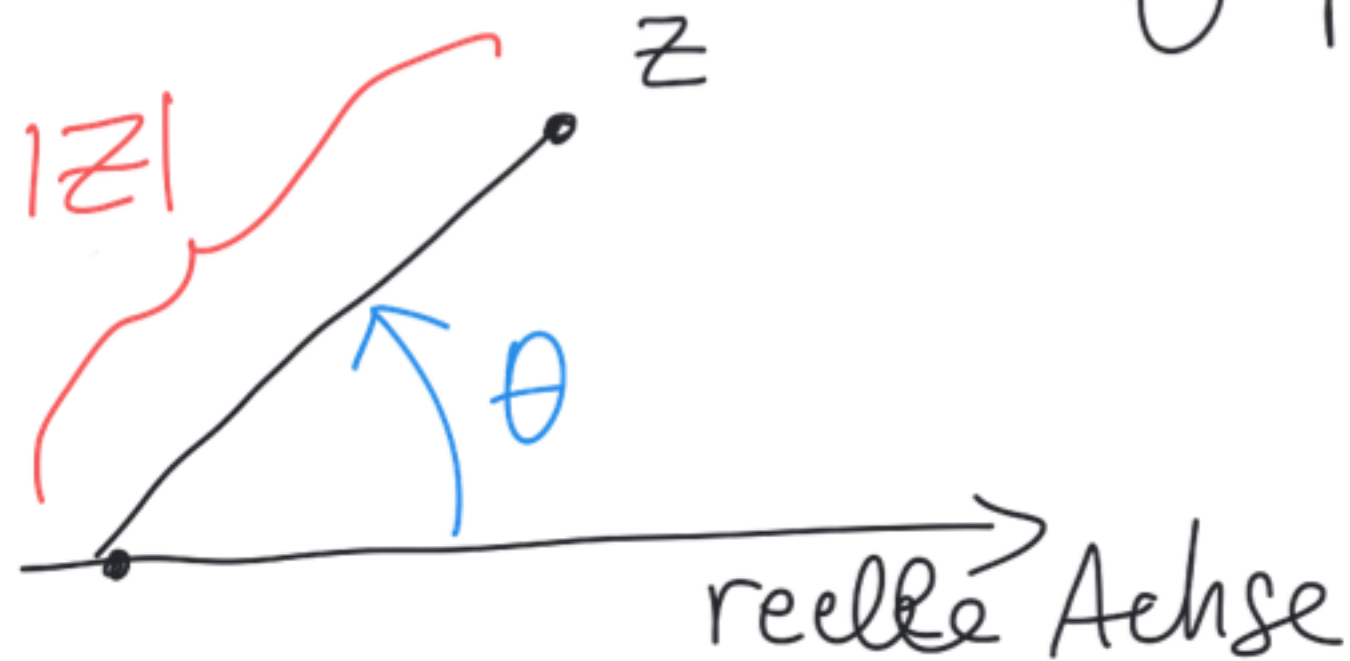
Satz $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists \theta \in \mathbb{R} : z = |z| e^{i\theta}$

Bws $\frac{z}{|z|} = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. $1 = \left| \frac{z}{|z|} \right| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (x, y) \in \text{Einheitskreis}$

liege $\Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ (genauer $0 \leq \theta < 2\pi$): $x = \cos \theta$
 $y = \sin \theta$

$\Rightarrow \frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \quad \square$

θ heißt ein Argument von z



Ist θ_0 ein festes Argument von z ,
 $\theta \in \mathbb{R}$ ist ein Argument von $z \iff \exists k \in \mathbb{R} : \theta - \theta_0 = 2\pi k$

Beispiel $-1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2} e^{i(\frac{3}{4}\pi + 100\pi)}$



Reeller Logarithmus

$\exp_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ ist bijektiv
 $x \mapsto e^x$

Seine Umkehrfunktion heißt $\log: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
und ist stetig.

Gibt es einen komplexen Logarithmus?

Complexer Logarithmus

Satz $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$ ist surjektiv.

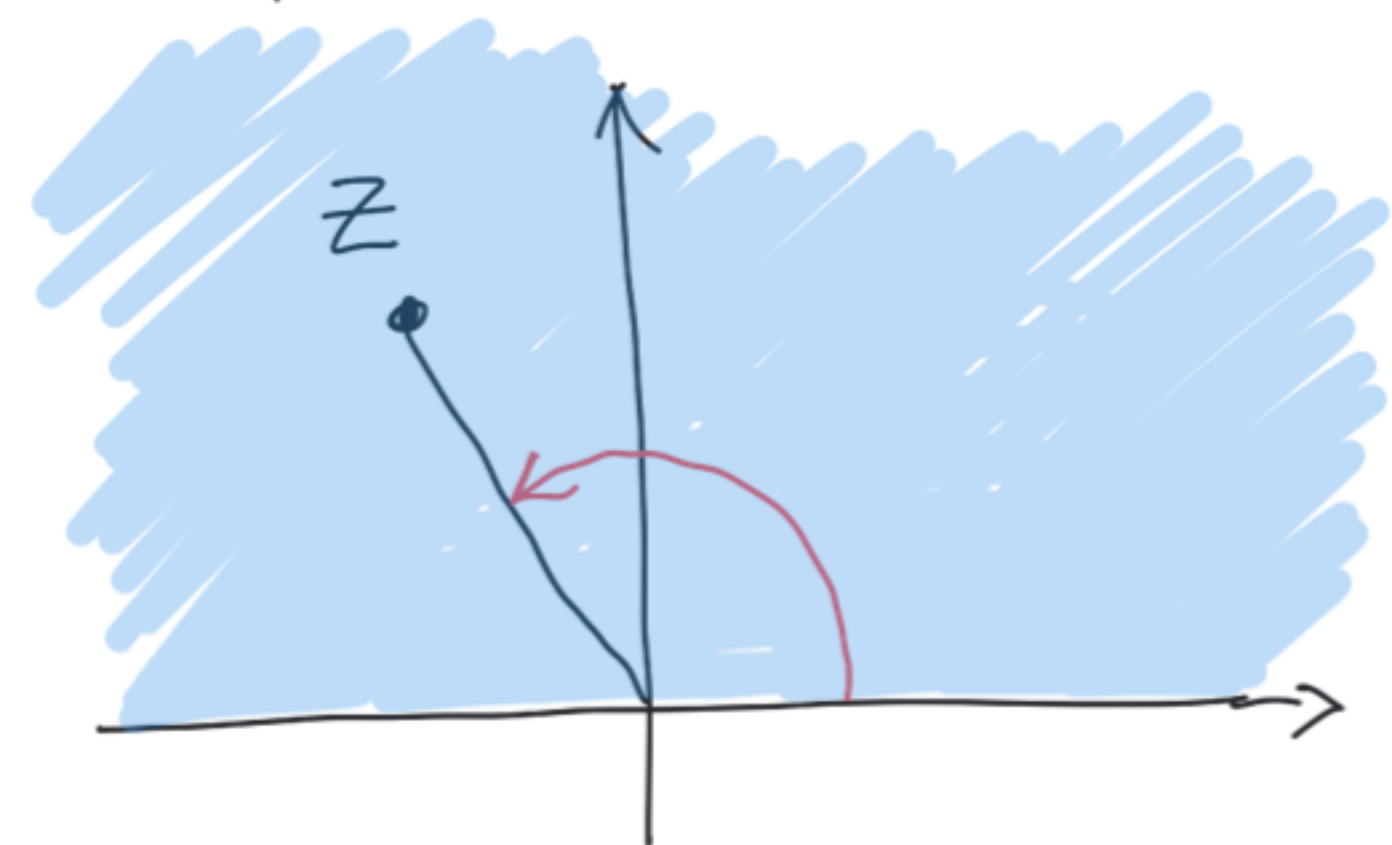
Bws $w \in \mathbb{C}^*$. Polardarstellung: $w = re^{i\theta}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in \mathbb{R}$. Dann
 $\log(r) + i\theta \in \exp^{-1}(w)$, denn $e^{\log(r) + i\theta} = re^{i\theta} = w. \quad \square$

Genauer: $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \exp^{-1}(re^{i\theta}) = \{\log(r) + i(\theta + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 $\Rightarrow \forall w \in \mathbb{C}^*, \exp^{-1}(w)$ hat unendlich viele Elemente.

Kann man für jedes $w \in \mathbb{C}^*$ ein bevorzugtes Element in $\exp^{-1}(w)$ wählen? Kann man diese Wahl in einer stetigen Abbildung $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ treffen, um eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ kreieren?

Def $U \subseteq \mathbb{C}^*$ offen. Ein KOMPLEXER LOGARITHMUS auf U ist eine stetige Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, für die
 $\forall z \in U \quad e^{f(z)} = z$ gilt.

Beispiel $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$



$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x+iy \mapsto \log \sqrt{x^2+y^2} + i \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$x, y \in \mathbb{R} \\ y > 0$$

$$= \log \sqrt{x^2+y^2} + i \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{x}{y} \right) \right)$$

f ist ein komplexer Logarithmus auf A

Auch $f + 2\pi i$ oder $f - 100\pi i$ sind komplexe Logarithmen auf A

Wir werden sehen, dass es gibt keinen komplexen Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$. Der Grund ist, dass man für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ ein Argument in einer stetigen Art nicht wählen kann.

Einheitswurzeln

$n \in \mathbb{N}^+$ positive natürliche Zahl

$$\zeta_n := e^{i \frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

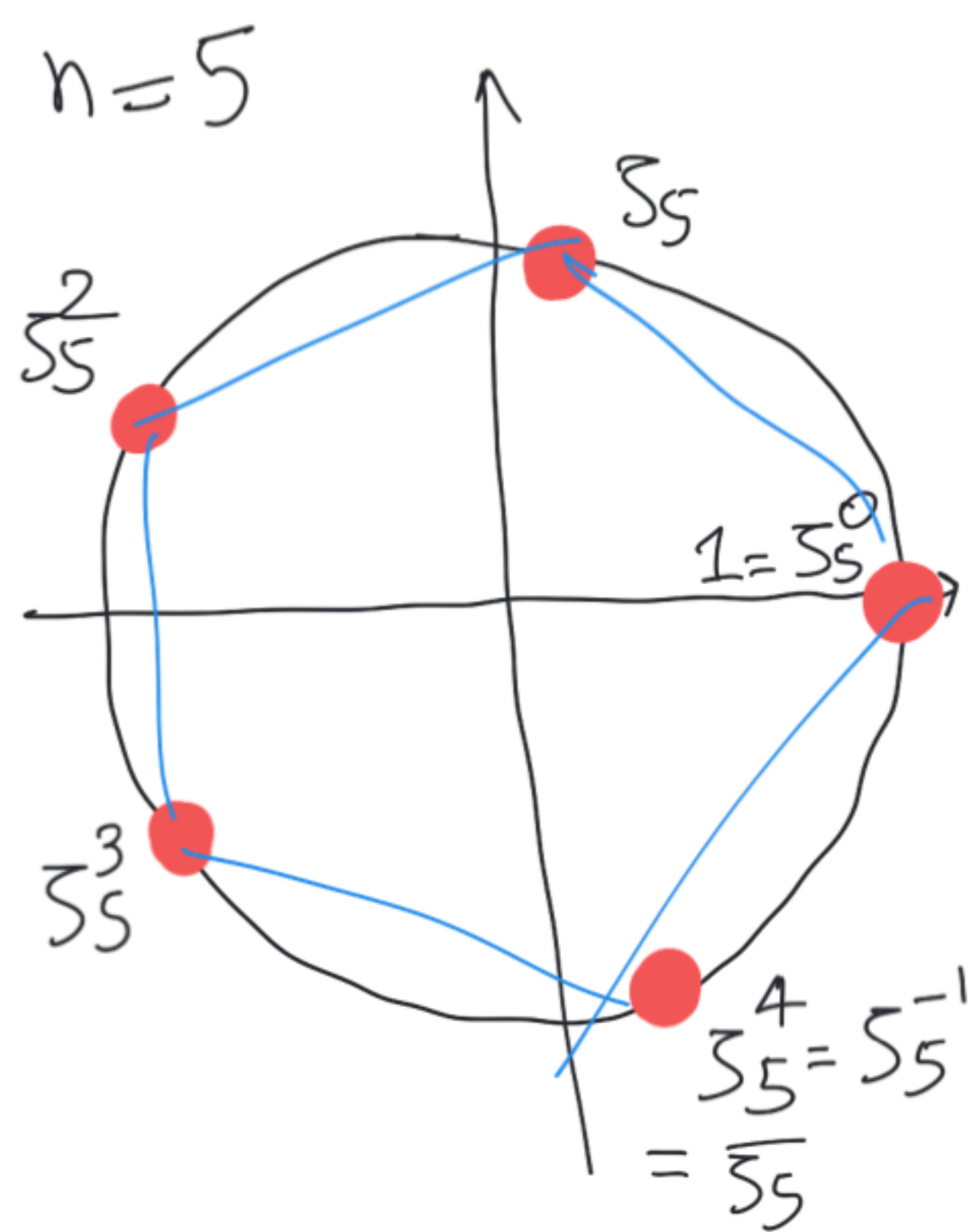
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad (\zeta_n)^k = e^{i \frac{2\pi}{n} k} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$$

$$\forall h, k \in \mathbb{Z}; \quad (\zeta_n)^k = (\zeta_n)^h \Leftrightarrow k \equiv h \pmod{n}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\zeta_n^k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}$$

"n-te Einheitswurzeln"

Sie bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen (regulären)
n-Ecks, das in der Einheitskreislänge $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
einbeschrieben ist.



$n \in \mathbb{N}^+$. Für jedes $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein einziges $b \in \mathbb{R}_{>0}$,
sodass $b^n = a$ gilt. Solches b heißt die n -te Wurzel von a
und wird $\sqrt[n]{a}$ genannt.

Außerdem ist die Abbildung $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ stetig
 $a \longmapsto \sqrt[n]{a}$

Die Einzigartigkeit und die Stetigkeit gelten nicht in $\mathbb{C}$.

Wurzeln einer komplexen Zahl

$n \in \mathbb{N}^+$, $z \in \mathbb{C}$. Finden alle $w \in \mathbb{C}$ sodass $w^n = z$.

Gilt $z=0$, dann ist $w=0$ die einzige Wurzel.

Nehmen wir an, dass $z \neq 0$ gilt. Polardarstellung:

$z = r e^{i\theta}$ mit $r \in \mathbb{R} > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Dann gibt es n n -te

Wurzeln von z :

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \zeta_n^k \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n$$

Sie bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen n -Ecks,

das in der Kreislängen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt[n]{r}\}$

einbeschrieben ist.

Wurzeln der identischen Abbildung

Def $U \subseteq \mathbb{C}^*$ offen, $n \in \mathbb{N}^+$. Eine n -TE WURZEL DER IDENTISCHEN ABBILDUNG ist eine stetige Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{C}^*$, sodass $\forall z \in U, f(z)^n = z$ gilt.

Warum gibt es keine 2-te Wurzel der identischen Abbildung auf $\mathbb{C}^*$?

