

Def Ein TOPOLOGISCHER RAUM ist ein Paar (X, τ) , sodass:
 X ist eine Menge, τ ist eine Menge von Teilmengen von X ,

- $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
- $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$
- $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau.$

τ heißt eine TOPOLOGIE auf der Menge X .

Die Elemente von τ heißen OFFENE TEILMENGEN von X .

Beispiele 1) $\{\emptyset, X\}$ ist die indiskrete Topologie

2) $2^X = \{A \subseteq X\}$ ist die diskrete Topologie

3) $X = \mathbb{R}$. Betrachte man die Topologie τ :

$$A \in \tau \iff \forall a \in A, \exists \varepsilon \in (0, +\infty) : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$$



Def (X, τ) top. Raum.

- $A \subseteq X$ heißt ABGESCHLOSSEN, wenn $X \setminus A$ offen ist.
 - $U \subseteq X$ heißt UMGEBUNG von $x \in X$, wenn es eine offene Teilmenge $A \subseteq X$,^{gibt} sodass $x \in A \subseteq U$.
 - Seien $B \subseteq X$ und $x \in X$:
 - x heißt ein INNERER Punkt von B , wenn B eine Umgebung von x ist.
 - x heißt ein ÄUßERER Punkt von B , wenn $X \setminus B$ eine Umgebung von x ist.
 - x heißt ein RANDPUNKT von B , wenn x kein innerer oder äußerer Punkt von B ist.
 - Sei $B \subseteq X$. Die INNERE KERN von B ist
$$\overset{\circ}{B} := \{\text{innere Punkte von } B\} = \bigcup \{A \subseteq X \text{ offen} \mid A \subseteq B\}$$
- Die ABGESCHLOSSENE HÜLLE von B ist
- $$\overline{B} := \{\text{innere oder Randpunkte von } B\} = \bigcap \{C \subseteq X \text{ abgeschlossen} \mid C \supseteq B\}$$

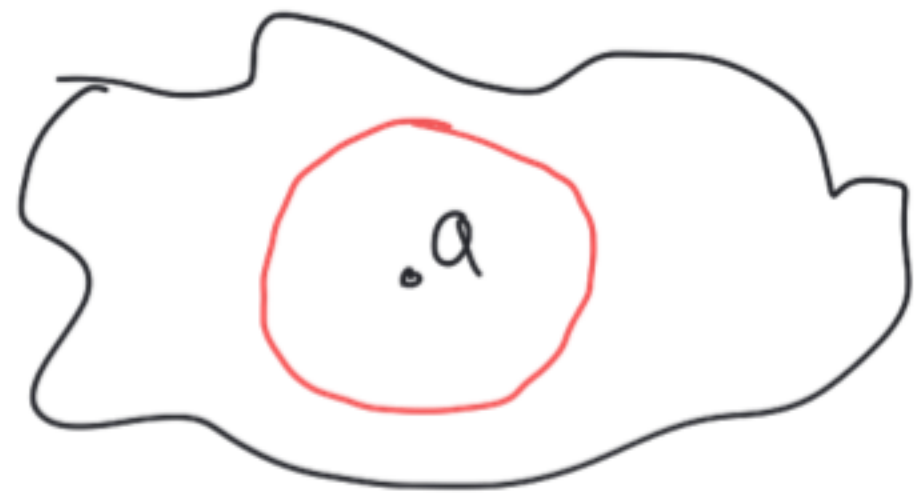
Def Ein METRISCHER RAUM ist ein Paar (X, d) mit: X ist eine Menge
 $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ ist eine Abbildung sodass:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ "Dreiecksungleichung"

Def (X, d) met. Raum. Die KUGEL mit Radius r um $x \in X$ ist
 $B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$

Ein met. Raum (X, d) erzeugt eine Topologie auf X :

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A, \exists r \in \mathbb{R} > 0 : B_r(a) \subseteq A\}$$



Def $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Ein NORMIERTER RAUM ist ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ mit: X ist ein K -Vektorraum, $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ ist eine Abbildung sodass:

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in X, \forall \lambda \in K \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ erzeugt eine Metrik:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Beispiel $X = \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ erzeugen die gleiche Topologie:

$n=2$

genannt
Euklidische
Topologie

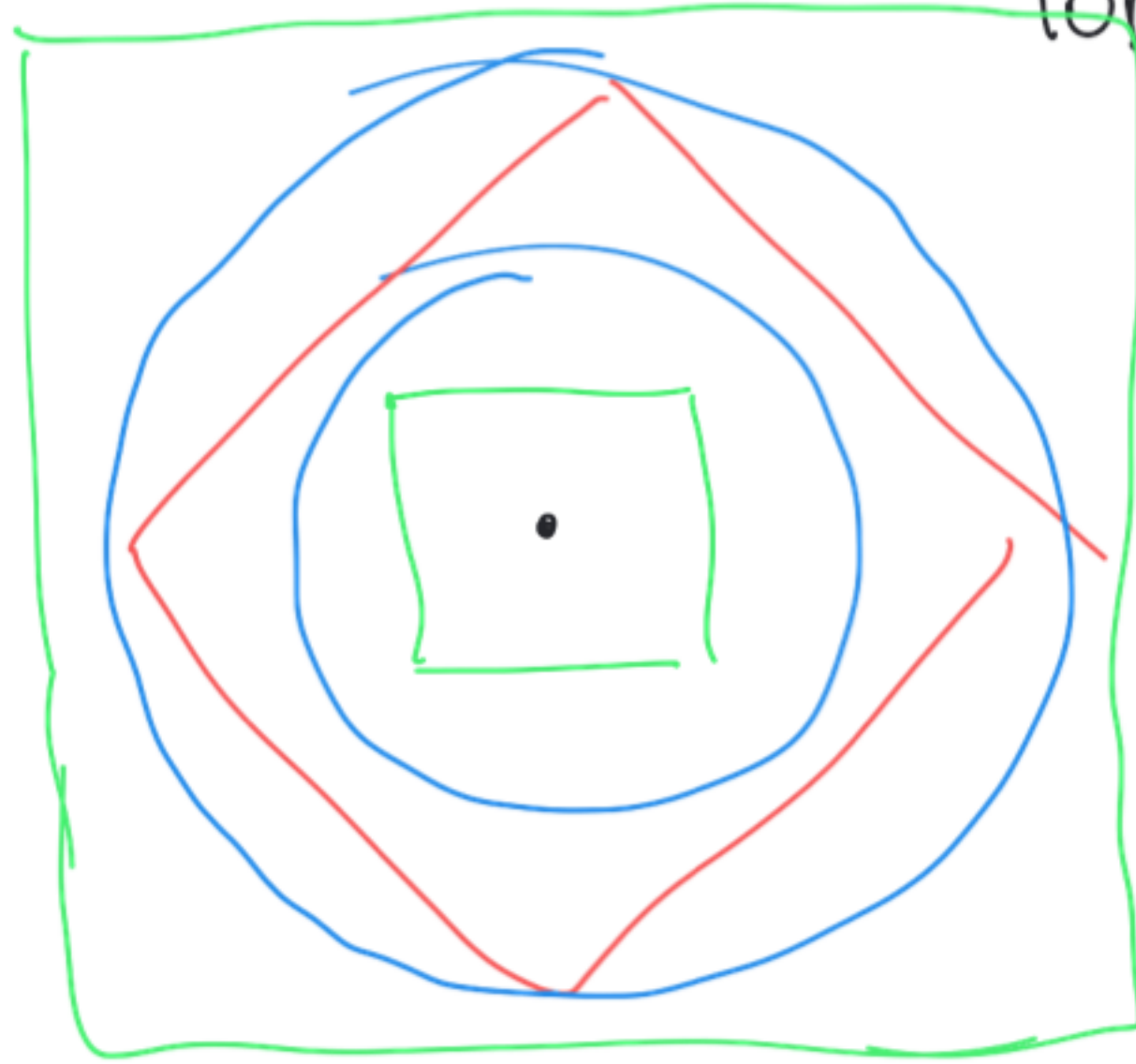
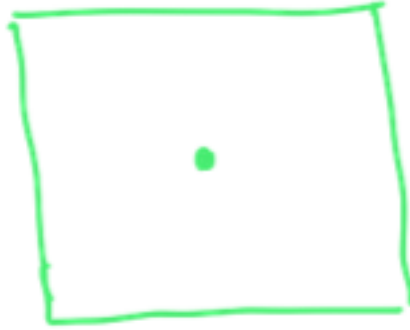
$\|\cdot\|_1$



$\|\cdot\|_2$



$\|\cdot\|_\infty$



$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ hat immer die Euklidische Topologie

Def Sei (X, τ) ein top. Raum. Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die TEILRAUMTOPOLOGIE auf Y , die durch X induziert wird, ist $\{A \cap Y \subseteq Y \mid A \in \tau\}$

Wenn Y eine Teilmenge eines top. Raumes (X, τ) ist, werden wir auf Y die Teilraumtopologie betrachten.

Beispiele $[0, 1]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$, aber es ist offen in ihm selbst, denn $[0, 1] = \mathbb{R} \cap [0, 1] = (-1, 2) \cap [0, 1]$
 $\uparrow$ offen in $\mathbb{R}$

$[0, 1)$ ist offen in $[0, 1]$: $[0, 1) = (0, +\infty) \cap [0, 1]$
 $\uparrow$ offen in $\mathbb{R}$

Offen/abgeschlossen Sein ist eine relative Eigenschaft:
man muss immer angeben, wo eine Menge offen/abgeschl. ist.

Def Seien X und Y zwei top. Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt STETIG am Punkt $x_0 \in X$, wenn:
 $\forall V$ Umgebung von $f(x_0)$ in Y , $\exists U$ Umgebung von x_0 in X : $f(U) \subseteq V$.
 f heißt STETIG, wenn sie stetig an jedem Punkt von X ist.

Satz Seien X, Y top. Räume und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann:
 f ist stetig $\iff \forall B \subseteq Y$ offen, $f^{-1}(B)$ ist offen in X
Bws $\Rightarrow$) Sei $B \subseteq Y$ offen. Wir wollen beweisen, dass $f^{-1}(B)$ offen in X ist. Sei $x \in f^{-1}(B)$. Da f stetig an x ist und B eine Umgebung von $f(x)$ in Y ist, kann man eine Umgebung U_x von x in X finden, sodass $f(U_x) \subseteq B$.
 U_x Umgebung von x in $X \Rightarrow \exists A_x$ offen in X : $x \in A_x \subseteq U_x$.
 $f(A_x) \subseteq f(U_x) \subseteq B \Rightarrow x \in A_x \subseteq f^{-1}(B)$.

Da x ein beliebiger Punkt von $f^{-1}(B)$ ist, gilt $f^{-1}(B) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B)} A_x$
 $\Rightarrow f^{-1}(B)$ ist die Vereinigung von einigen offenen Teilmengen von $X \Rightarrow f^{-1}(B)$ ist offen in X .

$\Leftarrow$) Sei $x_0 \in X$. Wir wollen beweisen, dass f an x_0 stetig ist.

Sei V eine beliebige Umgebung von $f(x_0)$ in Y .

Man kann eine offene Teilmenge $B \subseteq Y$ finden, sodass $f(x_0) \in B \subseteq V$.

Hypothese $\Rightarrow f^{-1}(B)$ ist offen in X .

Da $x_0 \in f^{-1}(B)$, ist $f^{-1}(B)$ eine Umgebung von x_0 in X .

Und $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \subseteq V$. $\square$

Satz X, Y top. Räume, $f: X \rightarrow Y$.

f ist stetig $\Leftrightarrow \forall C \subseteq Y$ abgeschlossen, $f^{-1}(C)$ ist abgeschl. in X

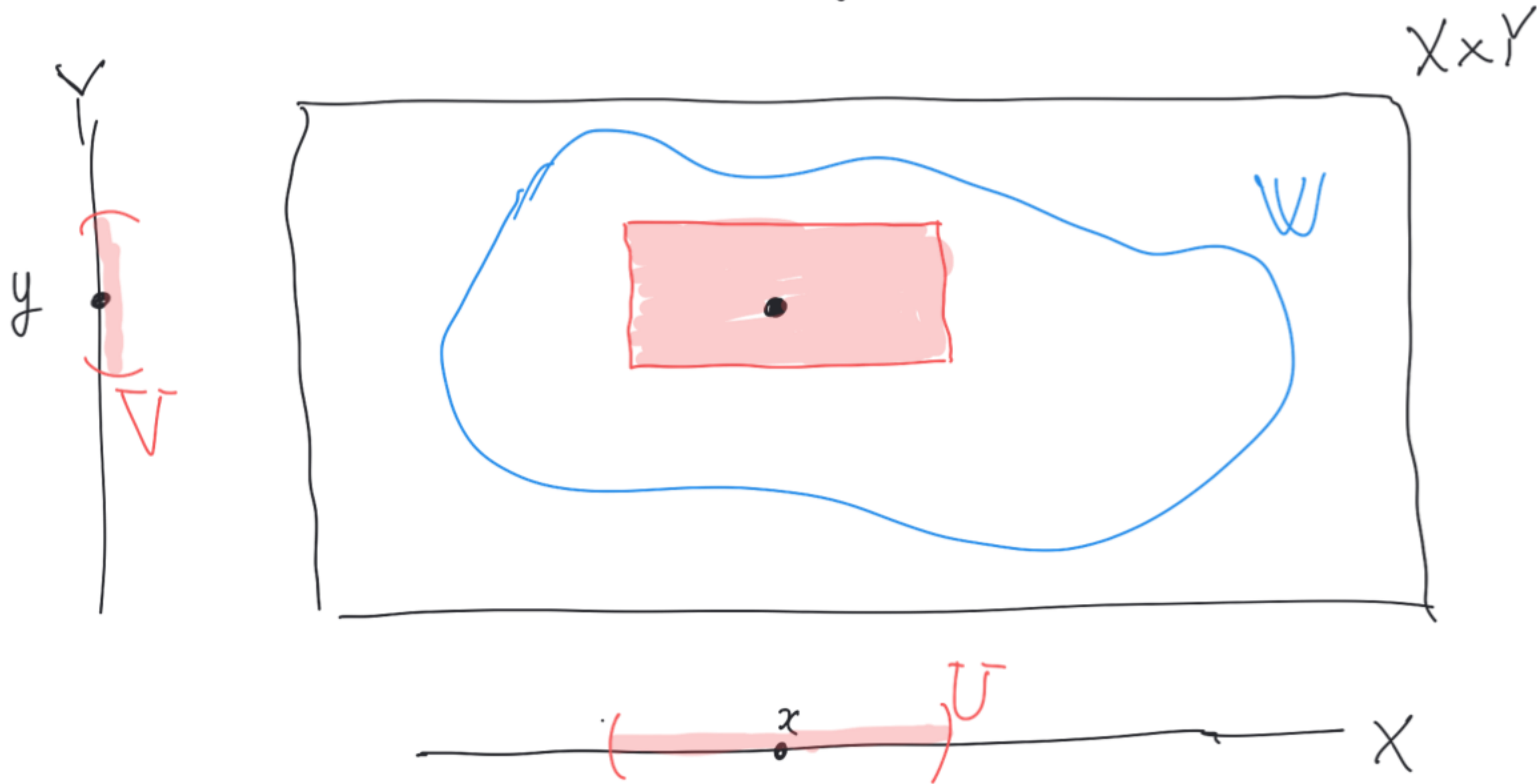
Satz X, Y, Z top. Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig, $g: Y \rightarrow Z$ stetig
 $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ ist stetig.

Satz $(X, d_X), (Y, d_Y)$ met. Räume. $f: X \rightarrow Y$. Dann:
 f ist stetig $\Leftrightarrow \forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$
Bws Hausaufgabe.

Def Seien X und Y zwei top. Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt HOMÖOMORPHISMUS wenn: f ist stetig, f ist bijektiv und $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ist stetig

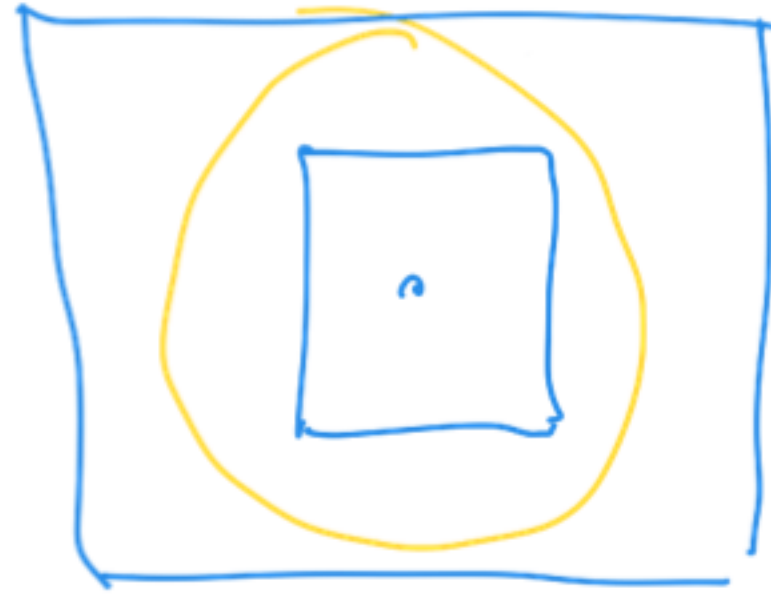
Beispiel $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ist ein Homöomorphismus.
 $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(x)$
 $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Def X, Y top. Räume. Die PRODUKTTOPOLOGIE ist die Topologie auf $X \times Y$, die in der folgenden Art definiert wird: $\forall W \subseteq X \times Y$
 W ist offen in $X \times Y \iff \forall (x, y) \in W, \exists U \subseteq X$ offen und $V \subseteq Y$ offen:
 $(x, y) \in U \times V \subseteq W$



Satz Die Produkttopologie auf $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$ ist die Euklidische Topologie von $\mathbb{R}^n$

Idee des Beweises



Satz X, Y top. Räume.

- Die kanonische Projektionen $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ sind stetig
- Z top. Raum, $f: Z \rightarrow X \times Y$ Abbildung. Dann:
 f ist stetig $\Leftrightarrow \text{pr}_X \circ f$ und $\text{pr}_Y \circ f$ sind stetig