

Def Ein top. Raum X heißt HAUSDORFFRAUM, wenn
 $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$, $\exists U$ Umgebung von x in X und $\exists V$ Umgebung
 von y in X : $U \cap V = \emptyset$



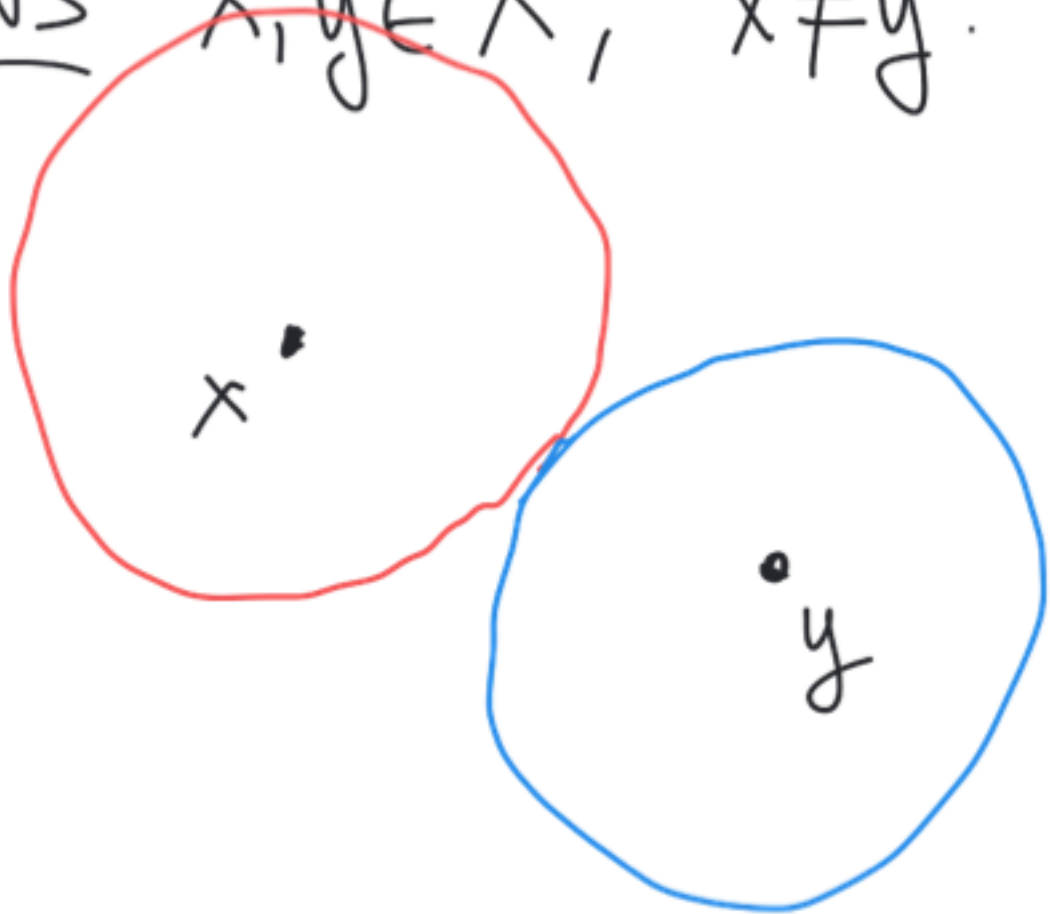
Satz Jeder met. Raum ist Hausdorffsch.

BWS $x, y \in X$, $x \neq y$. $d = \frac{1}{2} d(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$B_d(x) \cap B_d(y) = \emptyset :$$

$$z \in \uparrow \Rightarrow \begin{aligned} d(x, z) &< d \\ d(y, z) &< d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2d = d(x, y). \quad \square$$



Def Ein top. Raum X heißt ZUSAMMENHÄNGEND (CONNECTED)
wenn:

- $X \neq \emptyset$
- $\forall A, B \subseteq X$ offen, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = X$ oder $B = X$
" X lässt sich nicht in zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen zerlegen "

Satz X top. Raum, $X \neq \emptyset$. Dann
 X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ die leere Menge und der ganze Raum X
sind die einzigen Teilmengen, die
offen und abgeschlossen zugleich sind

Beispiel $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, denn
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Beispiel X diskreter top. Raum.
 X zusammenhängend $\Rightarrow X$ enthält nur ein Element

Satz $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$. Dann
 X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow X$ ist ein Intervall, d.h.
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y \leq z$
 $x \in X, z \in X \Rightarrow y \in X$

Satz $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung zwischen top. Räume
 X zusammenhängend $\Rightarrow f(X)$ ist zusammenhängend

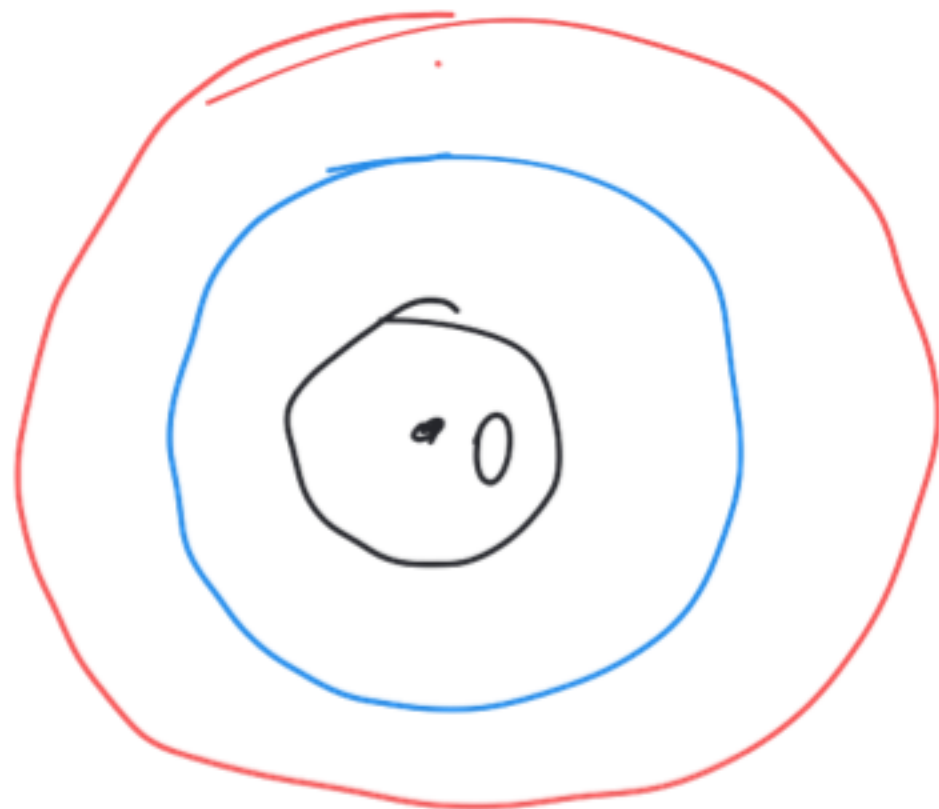
Satz X, Y top. Räume. Dann
 $X \times Y$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow X$ und Y sind zusammenhängend.

Def Sei X ein top. Raum. Ein ÜBERDECKUNG ist eine Familie $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Teilmengen von X , sodass $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

Eine Überdeckung $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von X heißt OFFEN, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ A_λ offen in X ist.

Ein TEILÜBERDECKUNG von einer Überdeckung $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von X ist $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$, wobei $\Lambda' \subseteq \Lambda$ und $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda = X$.

Beispiel $X = \mathbb{R}^n$.



$\{B_r(0)\}_{r \in \mathbb{R}_{>0}}$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$.

$\{B_r(0)\}_{r \in \mathbb{N}^+}$ ist eine Teilüberdeckung

$\{B_r(0)\}_{r \in (0,1)}$ ist keine Teilüberdeckung

Def Ein top. Raum heißt KOMPAKT, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h.:
Ist $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine beliebige offene Überdeckung von X ,
dann gibt es endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$, so dass
$$X = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_r}.$$

Beispiel $\mathbb{R}^n$ ist nicht kompakt:

Die Überdeckung $\{B_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung, denn

$$B_{n_1}(0) \cup \dots \cup B_{n_r}(0) = \underset{\uparrow}{B_N(0)} \subsetneq \mathbb{R}^n$$

wobei $N = \max\{n_1, \dots, n_r\}$

Satz $f: X \rightarrow Y$ stetig zwischen zwei top. Räumen.
 X kompakt $\Rightarrow f(X)$ kompakt

Satz X, Y top. Räume
 $X \times Y$ kompakt $\Leftrightarrow X$ und Y kompakt

Satz $Y \subseteq X$ Teilraum. Dann:

- Y kompakt, X Hausdorffsch $\Rightarrow Y$ abgeschlossen in X
- X kompakt, Y abgeschlossen in $X \Rightarrow Y$ kompakt

Satz (Bolzano Weierstraß) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilraum, Dann:

$$X \text{ kompakt} \Leftrightarrow \begin{cases} X \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}^n \\ X \text{ beschränkt in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ d.h. $\exists r \in \mathbb{R}_{>0} : X \subseteq B_r(0)$

Relative Eigenschaften

offen / abgeschlossen
Umgebung
innerer Kern
abgeschlossene Hülle
innerer / äußerer / Randpunkt

Im top. Raum $[0,1]$ ist 0 ein innerer Punkt von $[0,1)$.

man muss immer sagen,
wo das passiert

Absolute Eigenschaften

Hausdorffsch
zusammenhängend
kompakt
(in) diskret

Diese sind Eigenschaften, die durch Homöomorphismen nicht verändert werden