

Satz Die Abbildungen $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

Bws $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$. Man betrachte

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{|x_0| + |y_0| + 1} \right\}$$

$$\forall (x, y) \in B_\delta((x_0, y_0)) \quad \|\cdot\|_\infty \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_\infty < \delta$$

$$\Rightarrow \max \{ |x - x_0|, |y - y_0| \} < \delta$$

$$\Rightarrow |x - x_0| < \delta \text{ und } |y - y_0| < \delta. \quad \text{Dann:}$$

$$|xy - x_0 y_0| = |xy - x y_0 + x y_0 - x_0 y_0| \leq$$

$$\leq |x| |y - y_0| + |x - x_0| |y_0|$$

$$\leq (|x_0| + |x - x_0|) \cdot |y - y_0| + |x - x_0| \cdot |y_0|$$

$$< (|x_0| + \delta) \delta + |y_0| \cdot \delta$$

$$\stackrel{\delta < 1}{<} (|x_0| + 1) \delta + |y_0| \delta < \varepsilon. \quad \square$$

$$\stackrel{\delta < \frac{\varepsilon}{|x_0| + |y_0| + 1}}{<}$$

Satz X top. Raum $\Rightarrow C(X, \mathbb{R}) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist ein Ring

Bws $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$X \xrightarrow{f \times g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$

$x \mapsto (f(x), g(x))$

stetig auf Grund der Produkttopologie

$$\Rightarrow f+g: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$f+g$

□

Bem $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig.

X top. Raum $\Rightarrow C(X, \mathbb{C}) := \{X \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ Ring

Folgen in top. Räumen

X fester top. Raum. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Def Eine FOLGE in X ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$. Wir benutzen die Notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach (x_n) .

Eine Folge (x_n) KONVERGIERT zu $x \in X$ (und wir schreiben $x_n \rightarrow x$) wenn: $\forall U$ Umgebung von x in X , $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, x_n \in U$.

Satz (Eindeutigkeit des Grenzwertes) X Hausdorff, (x_n) Folge
 $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y \Rightarrow x = y$

Def X wird FOLGENKOMPAKT (sequentially compact) genannt, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge enthält.

Kompaktheit $\stackrel{?}{\longleftrightarrow}$ Folgenkompaktheit

Folgen in met. Räumen

(X, d) festes met. Raum.

Bem Eine Folge (x_n) in X konvergiert zu $x \in X \iff$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon.$

Def Eine Folge (x_n) in X heißt CAUCHY-FOLGE, wenn
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$

Satz Eine konvergente Folge ist Cauchy-sch.

Def (X, d) heißt VOLLSTÄNDIG, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Beispiel $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

Def Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt BANACHRAUM, wenn er vollständig ist.

Def Ein met. Raum ist TOTAL BESCHRÄNKT, wenn
 $\forall \varepsilon > 0, \exists E_\varepsilon \subseteq X$ endlich : $X = \bigcup_{e \in E_\varepsilon} B_\varepsilon(e)$

Beispiel $\mathbb{R}^n$ ist nicht total beschränkt.

$[0,1]$ und $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ sind total beschränkt.

Satz Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- 1) X ist kompakt
- 2) X ist folgenkompakt
- 3) (X,d) ist vollständig und total beschränkt.

Funktionenfolgen

Def X Menge, Y top. Raum. Eine Funktionenfolge $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ KONVERGIERT PUNKTWEISE zu der Funktion $f: X \rightarrow Y$, wenn:
 $\forall x \in X$, konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ in Y zu $f(x)$, d.h.
 $\forall x \in X, \forall U$ Umgebung von $f(x)$ in $Y, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, f_n(x) \in U$.

Bem X Menge, (Y, d) met. Raum. $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise zu $f: X \rightarrow Y$, genau wenn
 $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
 $\rightarrow N$ hängt von x ab

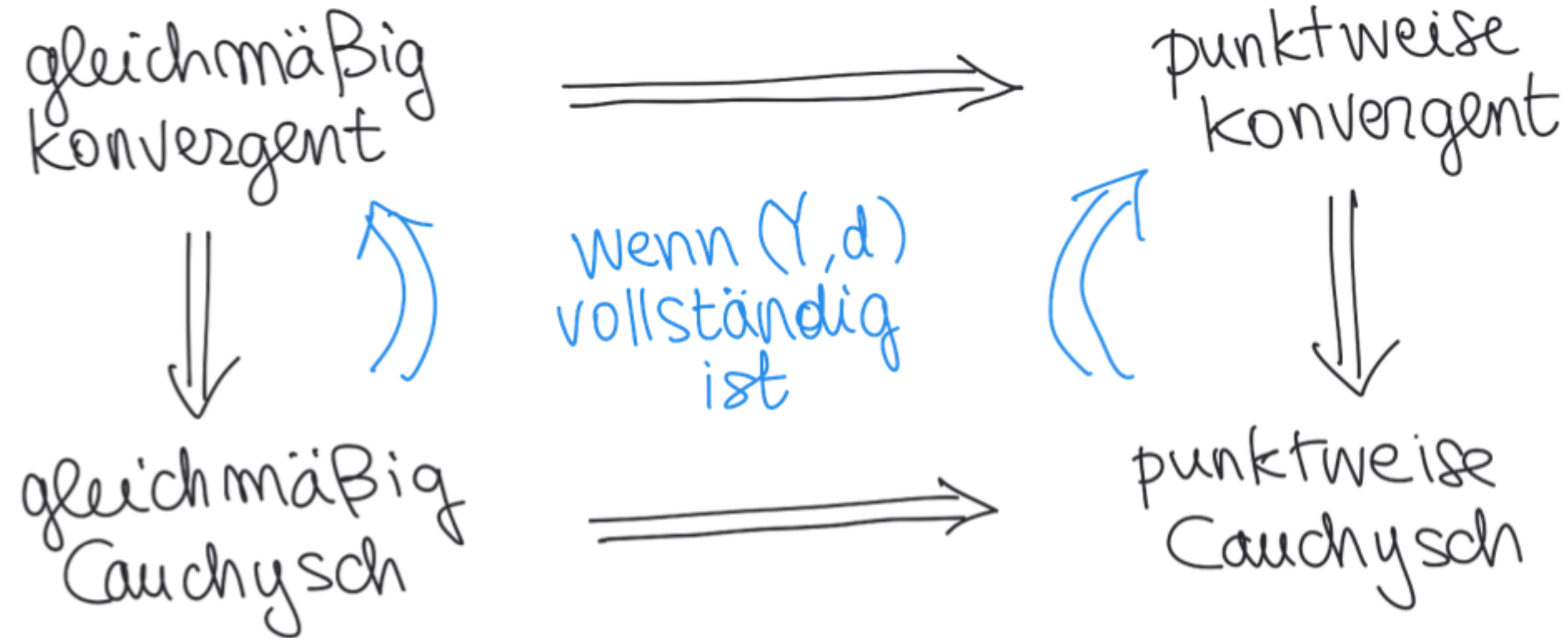
Def X Menge, (Y, d) met. Raum. Eine Funktionenfolge $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ KONVERGIERT GLEICHMÄßIG (UNIFORMLY) zu $f: X \rightarrow Y$, wenn:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in X, \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
 $\rightarrow N$ hängt nicht von x ab.

Bem gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz

Def X Menge, (Y, d) met. Raum. $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ ist:

- PUNKTWEISE CAUCHYSCH wenn $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall n, m \geq N, d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$
- ~~• $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$~~
- GLEICHMÄßIG CAUCHYSCH wenn
- ~~$\forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall x \in X, \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$~~
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall x \in X, \forall n, m \geq N, d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$

Bem



Satz X top. Raum, (Y, d) met. Raum, $f_n: X \rightarrow Y$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$.
 (f_n) konvergiert gleichmäßig zu $f: X \rightarrow Y \Rightarrow f$ ist stetig.

BWS $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ fest.

Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ man kann N finden, sodass
 $\forall x \in X \quad d(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ und $d(f(x), f_N(x)) < \varepsilon$.

f_N ist stetig $\Rightarrow$ man kann eine Umgebung U von x_0 in X finden,
sodass $\forall x \in U, d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon$.

Dann: $\forall x \in U$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Funktionenreihen in normierten Räumen

Def X Menge, $(Y, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Sei $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge. Wir sagen, dass die Funktionenreihe $\sum_n f_n$

- gegen $f: X \rightarrow Y$ PUNKTWEISE KONVERGIERT, wenn $(\sum_{n=0}^N f_n)_N$ gegen f punktweise konvergiert: $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu: \forall N \geq \nu, \|\sum_{n=0}^N f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.
- gegen $f: X \rightarrow Y$ GLEICHMÄßIG KONVERGIERT, wenn $(\sum_{n=0}^N f_n)_N$ gegen f gleichmäßig konvergiert: $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu: \forall N \geq \nu, \forall x \in X, \|\sum_{n=0}^N f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$,
d.h. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \|\sum_{n=0}^N f_n(x) - f(x)\| = 0$.
- GLEICHMÄßIG CAUCHYSCH ist, wenn $(\sum_{n=0}^N f_n)_N$ gleichmäßig Cauchyisch ist: $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu: \forall n \geq \nu, \forall p \geq 0, \sup_{x \in X} \|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\| < \varepsilon$
- NORMAL KONVERGIERT, wenn $\sum_n \sup_{x \in X} \|f_n(x)\| < +\infty$
(Es könnte keine Grenzwertfunktion geben, wenn Y nicht vollständig ist.)

Satz X Menge, $(Y, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$.

$\sum_n f_n$ konvergiert normal $\Rightarrow \sum_n f_n$ ist gleichmäßig Cauchy.

BWS $\sup_{x \in X} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \sup_{x \in X} \|f_k(x)\|$ kann beliebig klein sein,

weil die reelle Folge $\left(\sum_{k=0}^N \sup_{x \in X} \|f_k(x)\| \right)_N$ Cauchy ist. $\square$

Kor X Menge, $(Y, \|\cdot\|)$ Banachraum, $(f_n: X \rightarrow Y)_{n \in \mathbb{N}}$.

$\sum_n f_n$ konvergiert normal $\Rightarrow$ es gibt $f: X \rightarrow Y$, sodass $\sum_n f_n$ auf f gleichmäßig konvergiert.

Kor X top. Raum, $(Y, \|\cdot\|)$ Banachraum, $f_n: X \rightarrow Y$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_n f_n$ konvergiert normal $\Rightarrow$ es gibt $f: X \rightarrow Y$ stetig, sodass

$\sum_n f_n$ auf f gleichmäßig konvergiert.