

Holomorphe Funktionen

Def Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. f heißt HOLOMORPH (oder KOMPLEX ABLEITBAR oder KOMPLEX DIFFERENZIERBAR) im Punkt $z_0 \in U$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ in } \mathbb{C} \text{ existiert, d.h.}$$

$\exists \alpha \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}, z \in U \text{ und}$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Solches α heißt ABLEITUNG von f in z_0 : $f'(z_0) := \alpha$.

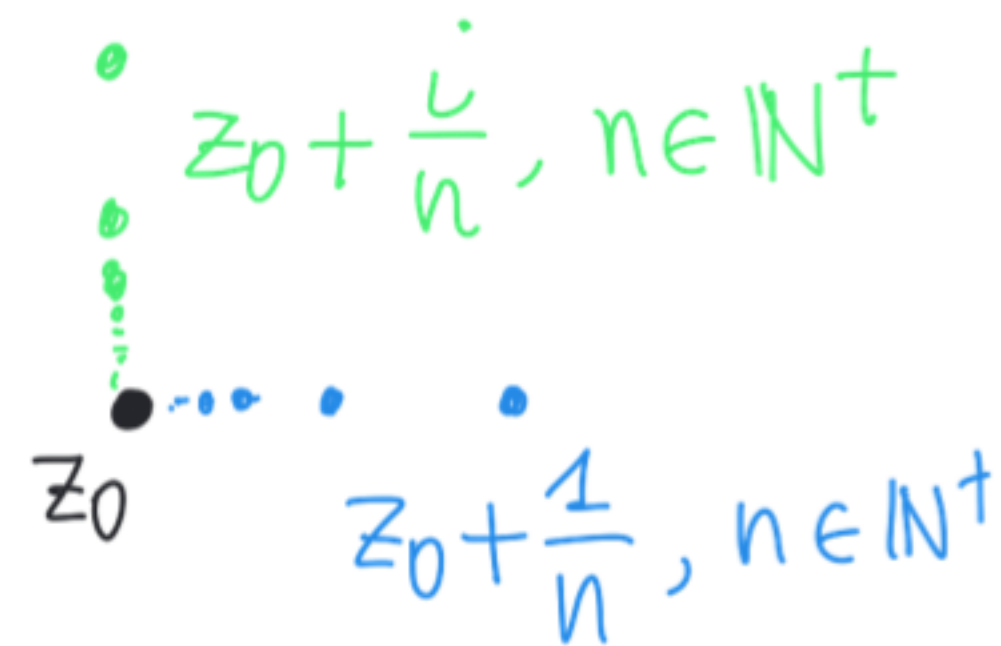
f ist holomorph auf U , wenn sie in jedem Punkt von U holomorph ist.

Beispiel Die identische Abbildung $\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$ ist holomorph: $\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$.

Die Ableitung von $\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 1$.

Nicht-Beispiel $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}, z \mapsto \text{Re } z$ ist holomorph in keinem Punkt von $\mathbb{C}$.

$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Re } z - \text{Re } z_0}{z - z_0}$ existiert nicht, denn



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Re}(z_0 + \frac{1}{n}) - \text{Re } z_0}{z_0 + \frac{1}{n} - z_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Re}(z_0 + \frac{i}{n}) - \text{Re } z_0}{z_0 + \frac{i}{n} - z_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{\frac{i}{n}} = 0$$

Rekapitulation über reelle Differenzierbarkeit

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (REELL) DIFFERENZIERBAR im Punkt $p \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodass

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|f(x) - f(p) - L(x-p)\|}{\|x-p\|} = 0.$$

Wenn L existiert, dann ist L eindeutig und heißt totale Ableitung von f in p . Sie wird mit df_p bezeichnet; ihre Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ist $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ "Jacobi-Matrix"

f ist stetig

f ist C^1 , d.h. die partielle Ableitungen existieren und sind stetig

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar

$\Rightarrow$ die partielle Ableitungen von f existieren

Satz (Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen,
 $z_0 \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. $u = \operatorname{Re} f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $v = \operatorname{Im} f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann
 f ist holomorph in $z_0 \iff f$ ist reell differenzierbar in z_0
 und
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = 0 \end{cases}$$

BWS f ist holomorph in $z_0 \iff$

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha \iff$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - \alpha \cdot (z - z_0)}{z - z_0} \right| = 0 \iff$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - \alpha \cdot (z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \iff$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - m_\alpha(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

wobei
 $m_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \alpha \cdot z$

$$\Leftrightarrow f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-differenzierbar in } z_0 \text{ und } \exists \alpha \in \mathbb{C} : df_{z_0} = m_\alpha$$

$$\Leftrightarrow f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-diff. in } z_0 \text{ und } \exists \alpha \in \mathbb{C} : \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(p) & \frac{\partial u}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(p) & \frac{\partial v}{\partial y}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha & -\operatorname{Im} \alpha \\ \operatorname{Im} \alpha & \operatorname{Re} \alpha \end{pmatrix}$$

↑ Hausaufgabe 1.4.a

$$\Leftrightarrow f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-diff. in } z_0 \text{ und } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(p) + \frac{\partial v}{\partial x}(p) = 0 \end{cases}$$

↖ ↗ $z = z_0$

□

Kor $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$.

f holomorph in $z_0 \Rightarrow f$ stetig in z_0 .

Bem Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sagen, dass die Jacobi-Matrix von einer holomorphen Abbildung die Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat. Außerdem ist $a+bi$ die komplexe Ableitung.

Beispiel Die Jacobi-Matrix von $\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x+iy \mapsto x+iy$ in jedem Punkt von $\mathbb{C}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nicht-Beispiel Die Jacobi-Matrix von $\text{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x+iy \mapsto x$ in jedem Punkt von $\mathbb{C}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto z^2$ $z_0 = x_0 + iy_0$ $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$$

Die Jacobi-Matrix in $z_0 = x_0 + iy_0$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial(2xy)}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$$

f erfüllt die C.R.schen Differentialgleichungen $\Rightarrow f$ ist holomorph und die komplexe Ableitung von f in z_0 ist

$$2x_0 + i2y_0 = 2z_0.$$