

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann:

- 1) f konstant $\Rightarrow f$ holomorph auf U und $f'(z_0) = 0$.
- 2) f und g holomorph in $z_0 \Rightarrow f+g$ holomorph in z_0 und
 $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
- 3) f und g holomorph in $z_0 \Rightarrow f \cdot g$ holomorph in z_0 und
 $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

Bws 1) $f=c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Dann $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{c-c}{z-z_0} = 0$.

$$2) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right)$$

2) (ein anderer Beweis) Cauchy-Riemann $\Rightarrow f$ und g sind $\mathbb{R}$ -differenzierbar in z_0 und ihre Jacobi-Matrizes in z_0 sind $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, bzw.

Die Summe von zwei $\mathbb{R}$ -differenzierbaren Abbildung ist $\mathbb{R}$ -diff. und ihre totale Ableitung ist die Summe von den totalen Ableitungen von den zwei Abbildungen:

$$d(f+g)_{z_0} = df_{z_0} + dg_{z_0} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow f+g$ erfüllt Cauchy-Riemann $\Rightarrow f+g$ ist holomorph in z_0 und
 $(f+g)'(z_0) = a_1+a_2 + i(b_1+b_2) = \operatorname{Re} f'(z_0) + \operatorname{Re} g'(z_0) + i(\operatorname{Im} f'(z_0) + \operatorname{Im} g'(z_0))$
 $= f'(z_0) + g'(z_0).$

$$3) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) =$$

Wir haben benutzt, dass g stetig in z_0 ist; deshalb $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0).$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0).$$

□

Beispiele • $\forall n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^n$

holomorph, denn sie ist das Produkt von holomorphen Abbildungen ($\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$). Die Ableitung von z^n ist $n \cdot z^{n-1}$.

• Sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom, d.h. $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und seine Ableitung ist $f'(z) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot j \cdot z^{j-1}$.

Def $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $\mathcal{O}(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $\Rightarrow \mathcal{O}(U)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Bws $0: U \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto 0$

$1: U \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto 1$

$f, g \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f+g, f \cdot g \in \mathcal{O}(U). \quad \square$

Bem $U \subseteq \mathbb{C}$ offen

$\{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ } C^\infty\} \subsetneq \dots \subsetneq \{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ } C^1\} \subsetneq \{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \mathbb{R}\text{-differenzierbar}\} \subsetneq \{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$

$\cup$

$\mathcal{O}(U)$

Bem $V \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$
offen $\Rightarrow \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$
 $f \mapsto f|_V$ Ringhomomorphismus

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ mit $f(U) \subseteq V$.
 $\Rightarrow g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und
 $\forall z_0 \in U \quad (g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$ Kettenregel

BWS Hausaufgabe.

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(U)$ mit $g(U) \subseteq \mathbb{C}^*$
 $\Rightarrow \frac{f}{g}: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und
 $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$

$$\forall z_0 \in U \quad \left(\frac{f}{g} \right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

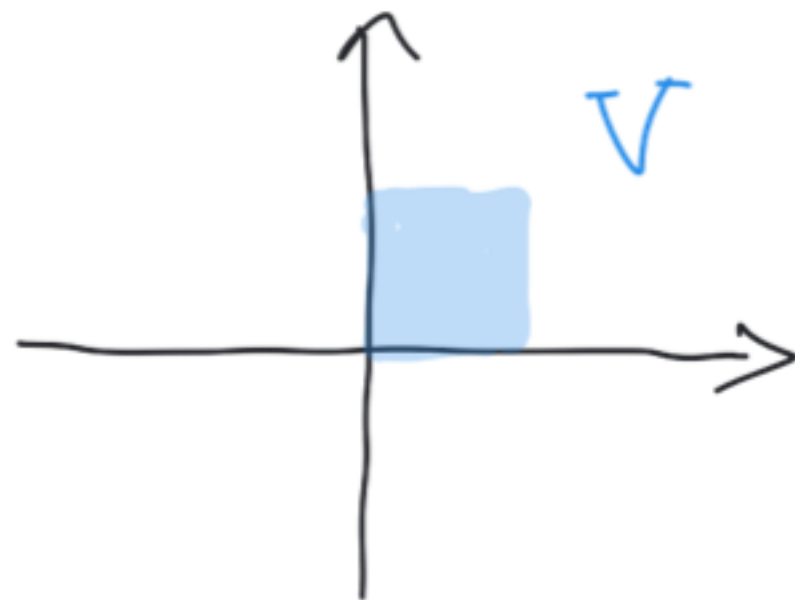
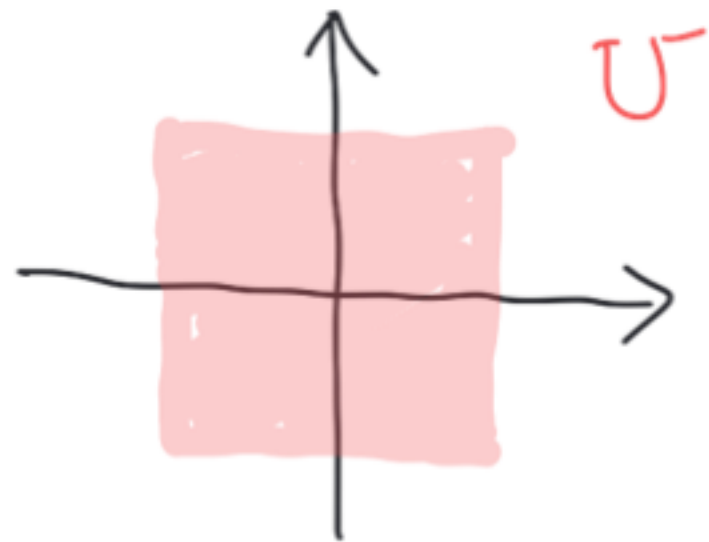
BWS Hausaufgabe.

Def Eine BIHOLOMORPHE ABBILDUNG ist eine bijektive holomorphe Abbildung mit holomorpher Umkehrabbildung. (BIHOLOMORPHISM)

Def Zwei offene Teilmengen U und V von $\mathbb{C}$ heißen BIHOLOMORPH wenn eine biholomorphe Abbildung zwischen ihnen existiert, d.h.
 $\exists f: U \rightarrow V$ bijektiv und holomorph : $f^{-1}: V \rightarrow U$ holomorph.
(BIHOLOMORPHIC)

Beispiel $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*, \forall \beta \in \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \alpha z + \beta$ ist eine biholomorphe Abbildung
(Hausaufgabe)

Beispiel $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$
 $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |\operatorname{Re} z| < 1, 0 < |\operatorname{Im} z| < 1\}$



$$f: U \rightarrow V$$
$$z \mapsto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$f^{-1}: V \rightarrow U$$
$$z \mapsto 2z - 1 - i$$

biholomorphe
Abbildungen.

Bem $U \subseteq \mathbb{C}, V \subseteq \mathbb{C}$ offen.

$f: U \rightarrow V$ biholomorph $\Rightarrow f$ Homöomorphismus

Bem Wir werden sehen, dass es offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ gibt, die homöomorph aber nicht biholomorph sind.