

Polynome

K Körper (z.B. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$)

T „Variable“ (Unbestimmte): formales Objekt

Ein POLYNOM ist $\sum_{n=0}^N a_n T^n$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_N \in K$.

$K[T] := \{\text{Polynome mit Koeffizienten in } K \text{ und in der Unbestimmten } T\}$

$K[T]$ ist ein Vektorraum über K :

$$\sum_{n=0}^N a_n T^n = \sum_{n=0}^{N'} a_n T^n \quad \text{wobei } N' > N \text{ und } N < n \leq N' \Rightarrow a_n = 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n T^n \right) + \left(\sum_{n=0}^N b_n T^n \right) := \sum_{n=0}^N (a_n + b_n) T^n$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{n=0}^N a_n T^n \right) = \sum_{n=0}^N \lambda a_n T^n \quad \forall \lambda \in K$$

$\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis von $K[T]$ über K .

$K[T]$ ist ein Ring:

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n T^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N'} b_n T^n \right) := \sum_{n=0}^{N+N'} c_n T^n$$

wobei $c_n = \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ 0 \leq k \leq N' \\ \text{mit } j+k=n}} a_j b_k$.

$$K \longrightarrow K[T]$$

$$a \longmapsto a \cdot 1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2 + \dots$$

ist einer injektive
Ringhomomorphismus

Polynome $\neq$ Polynomialfunktionen

$\text{ev}: \mathbb{K}[T] \longrightarrow \{ \text{Abbildungen } \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \}$ „evaluation“

$$f = \sum_{n=0}^N a_n T^n \longmapsto \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \alpha & \longmapsto & f(\alpha) = \sum_{n=0}^N a_n \alpha^n \end{array} \right]$$

ev ist ein Ringhomomorphismus.

Satz $\mathbb{K}$ unendlich $\implies \text{ev}$ ist injektiv.

BWS Ein $\neq 0$ Polynom kann nicht unendlich viele Nullstellen haben. $\square$

Beispiel p Primzahl, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p \implies$ das Polynom $T^p - T$ ist $\neq 0$,
aber es erzeugt die Nullfunktion $\mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ nach dem
kleinen fermatschen Satz. $\forall a \in \mathbb{F}_p, a^p = a.$

Formale Potenzreihen

$\mathbb{K}$ Körper, T Unbestimmte.

Eine formale Potenzreihe ist $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ mit $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{K}$

„Es ist ein unendliches Polynom“

$\mathbb{K}[[T]] := \{ \text{formale Potenzreihen mit Koeffizienten in } \mathbb{K} \text{ und in der Unbestimmten } T \}$

$\mathbb{K}[[T]]$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$:

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n T^n \right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n T^n \right) := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) T^n$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{n \geq 0} a_n T^n \right) := \sum_{n \geq 0} \lambda a_n T^n$$

Achtung: $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist keine Basis von $\mathbb{K}[[T]]$ über $\mathbb{K}$.

$K[T]$ ist ein Ring:

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n T^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n T^n \right) := \sum_{n \geq 0} c_n T^n, \quad \text{wobei}$$

$$\forall n \geq 0, \quad c_n = \sum_{\substack{j \geq 0, k \geq 0 \\ \text{mit } j+k=n}} a_j b_k$$

diese ist eine endliche Summe

$$K[T] \longrightarrow K[[T]]$$

$$\sum_{n=0}^N a_n T^n \longmapsto a_0 + a_1 T + \dots + a_N T^N + 0 \cdot T^{N+1} + 0 \cdot T^{N+2} + \dots$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus. Die Polynome sind genau die formalen Potenzreihen, die nur unendlich viele $\neq 0$ Koeffizienten haben:

$$K[T] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in K[[T]] \mid \exists N : \forall n > N, a_n = 0 \right\}.$$

So: $K \subseteq K[T] \subsetneq K[[T]]$ Ringe

Bem Eine formale Potenzreihe erzeugt generell keine Abbildung $K \rightarrow K$, denn man kann nicht eine unendliche Summe $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ in K berechnen.

Wir werden sehen, dass eine formale Potenzreihe eine Abbildung erzeugen kann, wenn $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Dafür brauchen wir, die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ zu betrachten.

Def Die ORDNUNG von einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$ in $K[[T]]$ ist

$$\text{ord}(f) := \begin{cases} +\infty & \text{wenn } f=0, \text{ d.h. } \forall n \geq 0 \quad a_n = 0 \\ \min \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} & \text{wenn } f \neq 0 \end{cases}$$

Bsp $K = \mathbb{Q}$, $\text{ord}(1 + 3T^2) = 0$, $\text{ord}(5T^3 + 6T^4) = 3$

Eigenschaften:

- $\forall f, g \in K[[T]]$, $\text{ord}(f \cdot g) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$
- $\forall f, g \in K[[T]]$, $\text{ord}(f + g) \geq \min \{ \text{ord}(f), \text{ord}(g) \}$
- $\forall f, g \in K[[T]]$, $\text{ord}(f) \neq \text{ord}(g) \Rightarrow \text{ord}(f + g) = \min \{ \text{ord}(f), \text{ord}(g) \}$
- $\forall f \in K[[T]]$, $f \in K^* \Leftrightarrow \text{ord}(f) = 0$

Satz Sei K ein Körper. Dann $K[[T]]$ und $K[T]$ sind Integritätsringe, d.h.
 $\forall f, g \in K[[T]], f \cdot g = 0 \iff f = 0 \text{ oder } g = 0$

Bws Sei $f \cdot g = 0$. Dann $+\infty = \text{ord}(0) = \text{ord}(f \cdot g) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$
 $\Rightarrow \text{ord}(f) = +\infty$ oder $\text{ord}(g) = +\infty \Rightarrow f = 0$ oder $g = 0$. $\square$

┌──┐

Beispiel $(1-T) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} T^n \right) = 1$ in $K[[T]]$.

Das Polynom $1-T \in K[T]$ hat kein multiplikatives Inverse in $K[T]$, aber es hat ein multiplikatives Inverse in $K[[T]]$.

Satz Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in K[[T]]$. Dann: f hat ein multiplikatives Inverse in $K[[T]] \iff a_0 \neq 0$.

BWS $\Rightarrow$) Wenn $\sum_{n \geq 0} b_n T^n$ ein multiplikatives Inverse von f ist, gilt $a_0 b_0 = 1$. Deshalb $a_0 \neq 0$.

$\Leftarrow$) Wir suchen $b_0, b_1, \dots \in K$, für die $\sum_{n \geq 0} b_n T^n$ ein multiplikatives Inverse von f ist. Das gilt, genau wenn

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Wir konstruieren $b_0, b_1, \dots$ in einer rekursiven Art:

$$\begin{cases} b_0 = a_0^{-1} \\ b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0 \\ b_2 = -a_0^{-1} (a_1 b_1 + a_2 b_0) \\ b_3 = -a_0^{-1} (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) \\ \vdots \end{cases}$$

□

Formale Ableitung

Def K Körper. Die FORMALE ABLEITUNG von einer formale Potenzreihe $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in K[[T]]$ ist $f' := \sum_{n \geq 1} a_n n T^{n-1} \in K[[T]]$

Satz $\forall f, g \in K[[T]], (f+g)' = f' + g'$ und $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

BWS Hausaufgabe. $\square$

Satz $\text{char } K = 0, f \in K[[T]]$. Dann:

$$f \in K \iff f' = 0.$$

BWS $\Rightarrow$) einfach.

$\Leftarrow$) $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$. Da $f' = 0$, gilt $a_n \cdot n = 0$ in $K \ \forall n \geq 1$.

Da $\text{char } K = 0$, $n \neq 0$ in $K \ \forall n \geq 1$. K Integritätsring $\Rightarrow \overset{\forall n \geq 1}{a_n = 0}$. $\square$

Bem Die Ableitung von $T^p \in \mathbb{F}_p[T]$ ist 0.