

$K = \mathbb{C}$ (oder $K = \mathbb{R}$).

Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$. „Was passiert, wenn T eine komplexe Zahl ist?“

Wenn $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ eine formale Potenzreihe ist, haben wir eine Reihe von komplexen Zahlen $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert, wenn die Folge $\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n \right)_N$ in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Def Die KONVERGENZMENGE einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ ist $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ konvergiert} \}$

Bem $0 \in K$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$

Wenn $K \subseteq \mathbb{C}$ die Konvergenzmenge einer formalen Potenzreihe $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$, hat man eine Abbildung

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

- Welche Eigenschaften hat diese Abbildung? Ist sie stetig?
- Wie sieht die Konvergenzmenge K aus?

Rekapitulation $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. $(x_n)_{n \geq 0}$ Folge in X . Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

- KONVERGIERT, wenn die Folge $\left(\sum_{n=0}^N x_n\right)_N$ konvergiert
- ist CAUCHYSCH, " " " " " " Cauchyisch ist
- ABSOLUT KONVERGIERT, wenn $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ gilt.

Bem Konvergent $\Rightarrow$ Cauchysch [Die inverse Implikation gilt, wenn X Banachraum ist.]

Satz Absolut konvergent $\Rightarrow$ Cauchysch

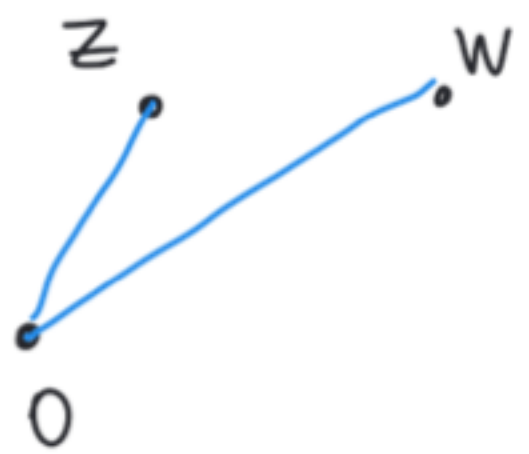
BWS $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ die Folge $\left(\sum_{n=0}^N \|x_n\|\right)_N$ in $\mathbb{R}$ ist Cauchysch $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu:$

$\forall p \geq 0 \left\| \sum_{n=\nu}^{\nu+p} x_n \right\| \leq \sum_{n=\nu}^{\nu+p} \|x_n\| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ in X ist Cauchysch. $\square$

Satz (Abelsches Konvergenzlemma) $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[T]$ formale Potenzreihe. Seien $z \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$. Dann:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut.
 Insbesondere $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert.



2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert nicht $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ konvergiert nicht.

Bws 2) folgt aus 1).

$|w| > |z| \geq 0 \Rightarrow w \neq 0$. Sei $q = \frac{|z|}{|w|}$. Es gilt $0 < q < 1$.
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n w^n = 0 \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}_{>0} : \forall n \geq 0 \ |a_n w^n| < C$
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |w|^n q^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} C q^n = \frac{C}{1-q} < +\infty$. $\square$

$$0 < q < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Satz Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[T]$ eine formale Potenzreihe und sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ihre Konvergenzmenge. Dann gilt genau eine der folgenden 3 Möglichkeiten:

- 1) $K = \{0\}$
- 2) Es gibt $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $B_R(0) \subseteq K \subseteq \overline{B_R(0)}$
 $\forall z \in B_R(0), \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut
- 3) $K = \mathbb{C}$ und $\forall z \in \mathbb{C} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut.

Bws Man nehme $R = \sup \{ |z| \mid z \in K \}$. Aus dem Abelschen Konvergenzlemma

- $R=0 \Rightarrow 1)$
- $0 < R < +\infty \Rightarrow 2)$
- $R = +\infty \Rightarrow 3). \quad \square$

Def R ist der KONVERGENZRADIUS der Potenzreihe.

Bem Zu der Konvergenz auf der Menge $\partial B_R(0) = \overline{B_R(0)} \setminus B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ haben wir keine allgemeingültige Aussage gemacht.

Man sehe $\sum_{n \geq 1} \frac{T^n}{n}$ am Ende

Def Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist der LIMES INFERIOR von $(x_n)_{n \geq 0}$ definiert als

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n := \sup_{k \geq 0} \inf_{n \geq k} x_n.$$

Analog ist der LIMES SUPERIOR von $(x_n)_{n \geq 0}$ definiert als

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n := \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} x_n$$

Eigenschaften:

- $-\infty \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq +\infty$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \text{ existiert in } [-\infty, +\infty]$

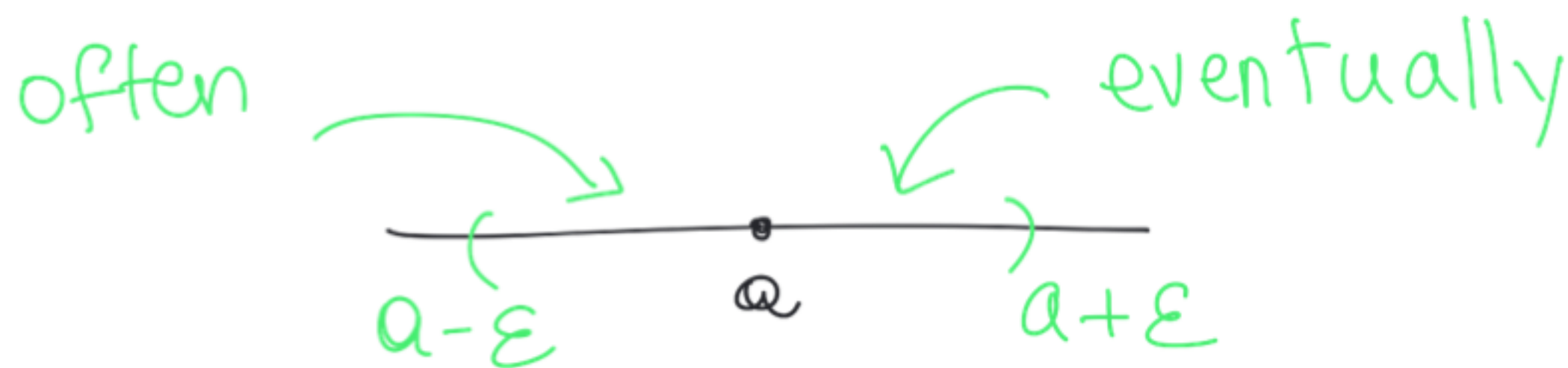
Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \iff \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} x_n = a \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \text{ ist eine untere Schranke von } \{\sup_{n \geq k} x_n \mid k \geq 0\} \\ \forall \varepsilon > 0, a + \varepsilon \text{ ist nicht eine untere Schranke von } \{\sup_{n \geq k} x_n \mid k \geq 0\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists k \geq 0 : \forall n \geq k, x_n \leq a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall k \geq 0, \exists n \geq k : x_n \geq a - \varepsilon \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists k \geq 0 : \{n \mid n \geq k\} \subseteq \{n \mid x_n \leq a + \varepsilon\} \\ \forall \varepsilon > 0, \{n \mid x_n \geq a - \varepsilon\} \text{ ist unendlich} \end{cases}$$



Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \geq 0 : x_n \geq M$$

(d.h. (x_n) ist nicht oben beschränkt)

Satz (Cauchy-Hadamard) Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[T]$ eine formale Potenzreihe und sei $R \in [0, +\infty]$ ihre Konvergenzradius. Dann:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bws Wir setzen $\alpha := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$, d.h.

$$\frac{1}{\alpha} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ die Konvergenzmenge von f .

• Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < \alpha$. Wir fixieren eine reelle Zahl r mit $|z| < r < \alpha$.

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{\alpha} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq k \quad |a_n| < \frac{1}{r^n}$$

Dann haben wir $\forall n \geq k \quad |a_n z^n| = |a_n r^n| \left(\frac{|z|}{r}\right)^n < \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$

Die Konvergenz der geometrischen Reihe und das Majorantenkriterium implizieren die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=k}^{+\infty} |a_n z^n|$

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut.

Wir haben bewiesen $B_\alpha(0) \subseteq K. \Rightarrow \alpha \leq R.$

• Jetzt sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \alpha$. Wir fixieren eine reelle Zahl r mit $\alpha < r < |z|$.

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{\alpha} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow$$

Die Definition des Limes superior zeigt, dass es eine unendliche Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ geben muss, so dass

$$\forall n \in S \quad \frac{1}{r} < \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{d.h. } \frac{1}{r^n} < |a_n|)$$

$$\Rightarrow \forall n \in S \quad |a_n r^n| = |a_n| r^n > 1$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ konvergiert absolut nicht.

$r < |z| \Rightarrow$ Nach Abelschem Konvergenzlemma, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ nicht.

$$\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B_\alpha(0)} \subseteq \mathbb{C} \setminus K \Rightarrow K \subseteq \overline{B_\alpha(0)} \Rightarrow R \leq \alpha. \quad \square$$

Satz (Cesaro) $(a_n)_{n \geq 0}$ Folge in $\mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in [-\infty, +\infty]$.

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \vartheta_n = L \\ (n \geq 1) \end{aligned}$$

Kor $(a_n)_{n \geq 0}$ Folge in $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Bws Wlog $a_0 = 1$.

$$c_n = \log a_n - \log a_{n-1} = \log \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \forall n \geq 1$$

$$\vartheta_n = \frac{c_1 + \dots + c_n}{n} = \frac{\log a_n - \log a_0}{n} = \log \sqrt[n]{a_n} \quad a_0 = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \Rightarrow c_n = \log \frac{a_n}{a_{n-1}} \rightarrow \log L \stackrel{\text{Cesaro}}{\Rightarrow} \log \sqrt[n]{a_n} = \vartheta_n \rightarrow \log L. \quad \square$$

Beispiele • $\sum_{n \geq 0} T^n$ $R=1$ Es erzeugt die Abbildung

$$B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{1-z}$$

• $\exp T := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} T^n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \rightarrow 0 \Rightarrow R = +\infty$$

• $\sum_{n \geq 1} n^n T^n$ $\sqrt[n]{n^n} = n \rightarrow +\infty \Rightarrow R=0$

Beispiel. $\sum_{n \geq 1} \frac{1^n}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \Rightarrow R = 1$$

Es erzeugt eine Abbildung $B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$. Was passiert auf $\partial B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = S^1$?

$z=1$: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht (harmonische Reihe)

$z=-1$: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut
(alternierende harmonische Reihe)

Leibniz-Kriterium