

Def $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ANALYTISCH wenn für jedes $z_0 \in U$ es eine positive reelle Zahl $r > 0$ und eine formale Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ gibt, sodass:

- der Konvergenz radius von $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ ist $\geq r$;

- $B_r(z_0) \subseteq U$

- $\forall z \in B_r(z_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Potenzreihenentwicklung in z_0
(Power series expansion)

Die formale Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ hängt vom Punkt z_0 ab.

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

- 1) Wenn $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist f holomorph und unendlich oft $\mathbb{C}$ -differenzierbar, und ihre komplexe Ableitung ist analytisch.
- 2) $\{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch}\}$ ist ein Unterring von $\mathcal{O}(U) = \{U \rightarrow \mathbb{C} \}_{\text{holomorph}}$.

Bws 1) Man benutze den Satz, der sagt, dass die durch eine konvergente Potenzreihe erzeugte Abbildung unendlich oft $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.

2) Man benutze den Satz, der sagt, dass die Summe und das Produkt von zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq r$ Konvergenzradius $\geq r$ haben. $\square$

Wir werden sehen: $\{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch}\} = \mathcal{O}(U)$.
Eine Abbildung ist analytisch, genau wenn sie holomorph ist.

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. $z_0 \in U$.

Seien $r > 0$ und $\sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$, sodass

- der Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ ist $\geq r$

- $B_r(z_0) \subseteq U$

- $\forall z \in B_r(z_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Die Potenzreihenentwicklung ist eindeutig

Dann: $\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

BWS $\forall k \geq 0, \forall z \in B_r(z_0) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k}$

$\Rightarrow f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k! \quad \square$

Die durch eine Potenzreihe erzeugte Abbildung ist offensichtlich analytisch im Punkt 0. Ist sie analytisch auch in den anderen Punkten der Konvergenzkugel?

Satz $\sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ mit Konvergenzradius $R > 0$.

$\Rightarrow$ die Abbildung $f: B_R(0) \xrightarrow{+ \infty} \mathbb{C}$
 $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist analytisch.

Bws Sei $z_0 \in B_R(0)$ fest. Wir werden beweisen:

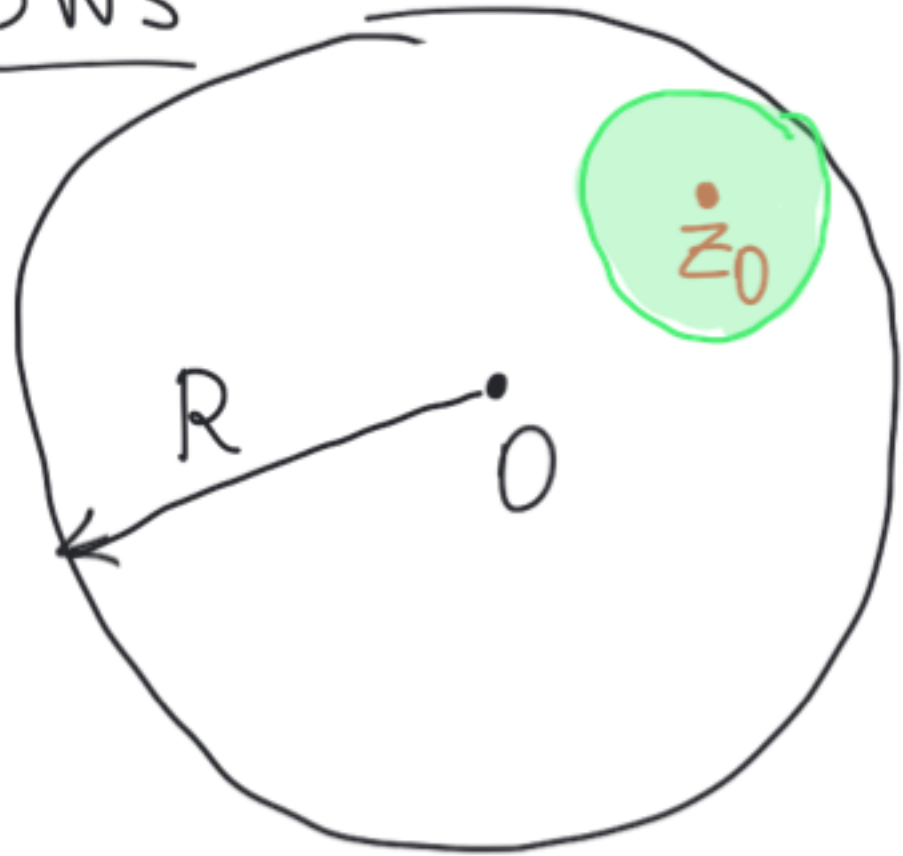
- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ hat

Konvergenzradius $\geq R - |z_0|$

- $\forall z \in B_{R-|z_0|}(z_0),$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n$$

Potenzreihenentwicklung
in z_0



Nach dem Satz über die Ableitung der durch eine Potenzreihe erzeugten Abbildung wissen wir:

$$\forall p \geq 0 \quad f^{(p)}(z_0) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} (z_0)^q$$

$$\Rightarrow |f^{(p)}(z_0)| \leq \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}| |z_0|^q$$

Reihe von positiven reellen Zahlen.
Die Ordnung ist irrelevant

Sei r eine reelle Zahl mit $|z_0| \leq r < R$.

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} |f^{(p)}(z_0)| (r - |z_0|)^p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{p! q!} |a_{p+q}| (r - |z_0|)^p |z_0|^q =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p! (n-p)!} |a_n| (r - |z_0|)^p |z_0|^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$$

$\uparrow$
 $q = n - p$

Binomischer Lehrsatz

$\uparrow$
 $r < R =$ Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$

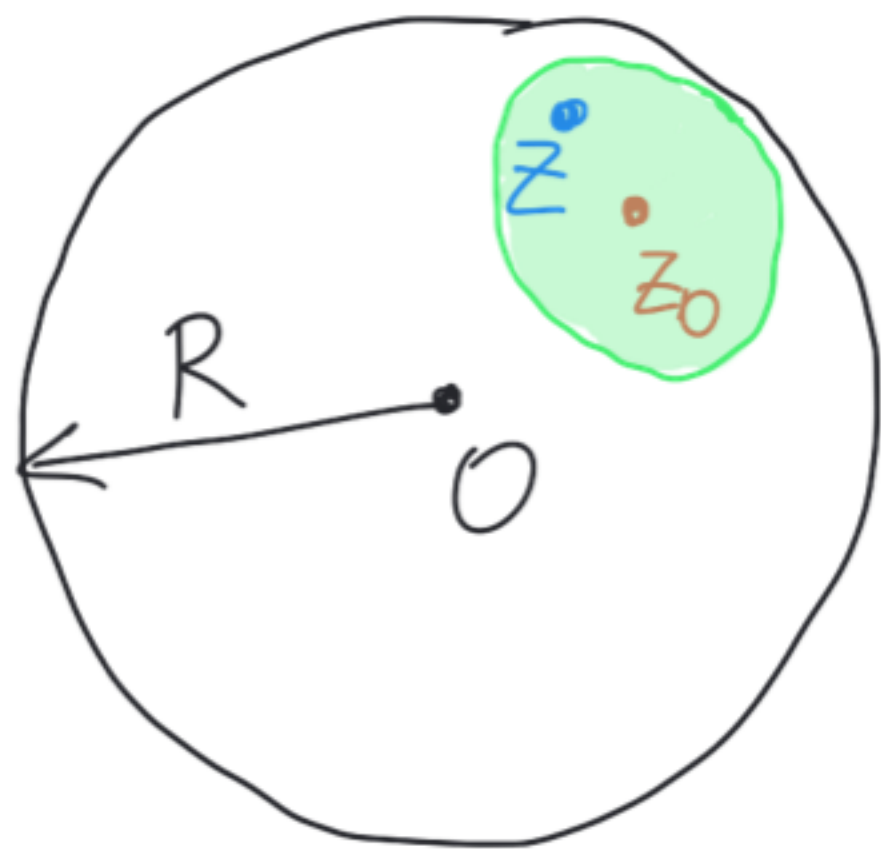
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} |f^{(p)}(z_0)| (r - |z_0|)^p < +\infty \Rightarrow$$

$r - |z_0| \leq$ Konvergenzradius von $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0) T^p$.

Da $r \in (|z_0|, R)$ beliebig war, dann gilt

$R - |z_0| \leq$ Konvergenzradius von $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0) T^p$.

Jetzt sei $z \in B_{R-|z_0|}(z_0)$.



$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut, weil $|z| < R$

$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p$ konvergiert absolut, weil

$$|z - z_0| < R - |z_0|$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0) (z-z_0)^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{p! q!} a_{p+q} (z_0)^q (z-z_0)^p$$

$$\stackrel{q=n-p}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p! (n-p)!} a_n z_0^{n-p} (z-z_0)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z) \quad \square$$

$\uparrow$ $n=0$ $p=0$ $\uparrow$ Binomischer Lehrsatz
 Umordnung von absolut konvergenten Potenzreihen

Kor $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. $\{z_0^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq U$.
 $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists r_\lambda > 0$ und $\sum_{n \geq 0} a_n^\lambda T^n \in \mathbb{C}[[T]]$:
 • der Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} a_n^\lambda T^n$ ist $\geq r_\lambda$
 • $B_{r_\lambda}(z_0^\lambda) \subseteq U$
 • $\forall z \in B_{r_\lambda}(z_0^\lambda)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^\lambda (z - z_0^\lambda)^n$

Wenn $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_{r_\lambda}(z_0^\lambda)$, dann ist f analytisch.