

Lemma 1 $f \in \mathbb{C}[[T]]$, $f \neq 0$, $f(0) = 0$

Der Konvergenzradius von f sei > 0 .

$\Rightarrow \exists \delta \in (0, R) : \forall z \in B_\delta(0) \setminus \{0\}, f(z) \neq 0$

[0 ist eine isolierte Nullstelle von f]

Bws $\text{ord}(f) = m$. $1 \leq m < +\infty$

$f = a_m T^m + a_{m+1} T^{m+1} + a_{m+2} T^{m+2} + \dots$ mit $a_m \neq 0$.

$b_n = a_m^{-1} a_{m+n} \quad \forall n \geq 1$.

$h = 1 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots$ So $f = a_m T^m \cdot h$

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_{m+n}|}{|a_m|}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{m+n}|} = \frac{1}{R} \Rightarrow$ der Konvergenzradius von h ist R

$\Rightarrow \forall z \in B_R(0), f(z) = a_m z^m \cdot h(z)$.

$h: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in 0, $h(0) = 1 \Rightarrow \exists \delta \in (0, R) :$

$\forall z \in B_\delta(0), |h(z) - 1| < 1 \Rightarrow h(z) \neq 0, \forall z \in B_\delta(0) \setminus \{0\} \quad f(z) = a_m z^m h(z) \neq 0$
 $\square$

Lemma 2 $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$. Dann:

$\forall n \geq 0, f^{(n)}(z_0) = 0 \iff f$ ist null auf einer Umgebung von z_0 in U :
 $\exists r > 0: B_r(z_0) \subseteq U$ und $\forall z \in B_r(z_0), f(z) = 0$.

BWS $\Leftarrow$) banal. Wir benutzen nicht, dass f analytisch ist; wir benutzen nur dass f unendlich oft $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.

$\Rightarrow$) Man nehme eine Potenzreihenentwicklung von f in z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < r.$$

Nach der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung:

$$\forall n \geq 0, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \forall z \in B_r(z_0), f(z) = 0. \quad \square$$

Bem Man betrachte die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f ist C^∞ . $\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) \neq 0$.

Lemma 3 $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $Z \subseteq U$ abgeschlossen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- i) Z ist nicht diskret.
- ii) $\exists z \in Z : \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(z) \cap Z \supsetneq \{z\}$
- iii) $\exists z \in U : \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(z) \cap Z \setminus \{z\} \neq \emptyset$

BWS i) $\Leftrightarrow$ ii): einfach, denn Z ist diskret $\Leftrightarrow \forall z \in Z, \{z\}$ ist offen in Z
 $\Leftrightarrow \forall z \in Z, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z) \cap Z = \{z\}$.

ii) $\Rightarrow$ iii): banal.

iii) $\Rightarrow$ ii): wir beweisen, dass $z \in Z$ gilt. Wäre z nicht in Z , dann gälte $z \in U \setminus Z$. Da $U \setminus Z$ offen in U ist, ist $U \setminus Z$ offen in $\mathbb{C}$. Deshalb gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(z) \subseteq U \setminus Z$; deshalb $B_\varepsilon(z) \cap Z = \emptyset$. $\downarrow \quad \square$

Bem Z könnte nicht abgeschlossen in $\mathbb{C}$ sein.

z.B.: $U = \mathbb{C}^*$, $Z = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$

Satz (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine zusammenhängend offene Teilmenge und sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- 1) $\exists z_0 \in U: \forall n \geq 0, f^{(n)}(z_0) = 0$
- 2) $\exists z_0 \in U$ und $r > 0: B_r(z_0) \subseteq U$ und $f|_{B_r(z_0)} = 0$
- 2') der innere Kern von $f^{-1}(0)$ in U (oder in $\mathbb{C}$) ist nicht leer.
- 3) $f = 0$, d.h. $\forall z \in U, f(z) = 0$
- 4) $f^{-1}(0)$ ist nicht diskret
- 4') $\exists z_0 \in U: \forall \varepsilon > 0, \exists w \in B_\varepsilon(z_0) \cap U \setminus \{z_0\}: f(w) = 0$
- 4'') $\exists z_0 \in U$ und eine Folge $(z_n)_{n \geq 1}$ in $U \setminus \{z_0\}: \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$ und $\forall n \geq 1, f(z_n) = 0$.

Wenn eine analytische Abbildung auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ eine nicht isolierte Nullstelle hat, dann ist sie die Nullfunktion.

BWS $2) \Leftrightarrow 2')$: banal.

$4) \Leftrightarrow 4') \Leftrightarrow 4'')$: Lemma 3 mit $Z = f^{-1}(0)$.

$3) \Rightarrow$ alle andere: banal

$1) \Leftrightarrow 2)$: Lemma 2

$2) \Rightarrow 3)$: $A = \{z \in U \mid \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq U \text{ und } f|_{B_r(z)} = 0\}$

A ist die Menge von den Punkten von U , für die es eine Umgebung gibt, wo f null ist.

A ist offen in U : $z \in A \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq U \text{ und } f|_{B_r(z)} = 0$;

$\forall y \in B_r(z), B_{r-|y-z|}(y) \subseteq B_r(z) \Rightarrow y \in A$

$\Rightarrow B_r(z) \subseteq A$



A ist abgeschlossen in U :

$A = \{z \in U \mid \forall n \geq 0 \ f^{(n)}(z) = 0\} = \bigcap_{n \geq 0} \{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0\}$

$\uparrow$ Lemma 2

A ist nicht leer: $z_0 \in A$ aus 2).

Durchschnitt abgeschlossener Teilmengen von U

U zusammenhängend
 $A \neq \emptyset$, A offen und abgeschlossen in U $\} \Rightarrow A=U \Rightarrow f=0$.

4') $\Rightarrow$ 1): $z_0 \in U : \forall \varepsilon > 0, \exists w \in B_\varepsilon(z_0) \cap U \setminus \{z_0\} : f(w) = 0$.

Da f analytisch ist, hat f eine Potenzreihenentwicklung in z_0 : $\forall w \in B_r(z_0), f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (w - z_0)^n$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in (0, r), \exists w \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} : 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (w - z_0)^n$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in (0, r), \exists z \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\} : 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$

Lemma 1
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} T^n = 0$ in $\mathbb{C}[[T]]$. $\square$

Kor (Identitätssatz für analytische Funktionen)

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ analytische Funktionen. Dann

$$f = g \iff \begin{array}{l} \exists S \subseteq U \text{ nicht diskret:} \\ f|_S = g|_S \end{array} \iff \begin{array}{l} \exists z_0 \in U: \forall n \geq 0 \\ f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \end{array}$$

Bws Man benutze den vorherigenden Satz mit $f - g$. $\square$

Die Potenzreihenentwicklung einer analytischen Funktion in einem Punkt bestimmt die Funktion, wenn die Definitionsmenge zusammenhängend ist.

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $z_0 \in U$. Dann:

$$\begin{array}{ccc} \{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch}\} & \longrightarrow & \mathbb{C}[[T]] \\ f & \longmapsto & \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) T^n \end{array}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

Bws Ringhomomorphismus: schon beweis.

Injektivität: Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung. $\square$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend.

$\Rightarrow \{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch}\}$ ist ein Integritätsring

Bws Seien f, g zwei analytische Funktionen auf U mit $f \cdot g = 0$.

Sei $z_0 \in U$ und sei $a, b \in \mathbb{C}[[T]]$ die Potenzreihenentwicklung von f und g :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ für } |z-z_0| < r, \quad a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n \text{ für } |z-z_0| < r, \quad b = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n$$

Eindeutigkeit der Potenzreihenentw.

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ für } |z-z_0| < r, \quad a \cdot b = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n T^n$$

$f \cdot g = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0 \Rightarrow (a=0 \text{ oder } b=0) \Rightarrow$

$\mathbb{C}[[T]]$ Integritätsring

Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung

$\Rightarrow f|_{B_r(z_0)} = 0 \text{ oder } g|_{B_r(z_0)} = 0 \Rightarrow f=0 \text{ oder } g=0. \quad \square$

Beispiel $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$

$$f: U \rightarrow \mathbb{C} \quad f(z) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 & \text{wenn } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$$g: U \rightarrow \mathbb{C} \quad g(z) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \operatorname{Im} z > 0 \\ 1 & \text{wenn } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

f und g sind nicht null, aber $f \cdot g = 0$

U ist nicht zusammenhängend:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$$

f und g sind analytisch

$\{U \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch}\}$ ist nicht ein Integritätsring

Bemerkung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ e^{1/x} & x < 0 \end{cases}$$

f und g sind C^∞ , sind nicht null, aber $f \cdot g = 0$.

$C^\infty(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid C^\infty\}$ ist nicht ein Integritätsring.

$f \neq 0$, aber $f^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ ist nicht diskret.