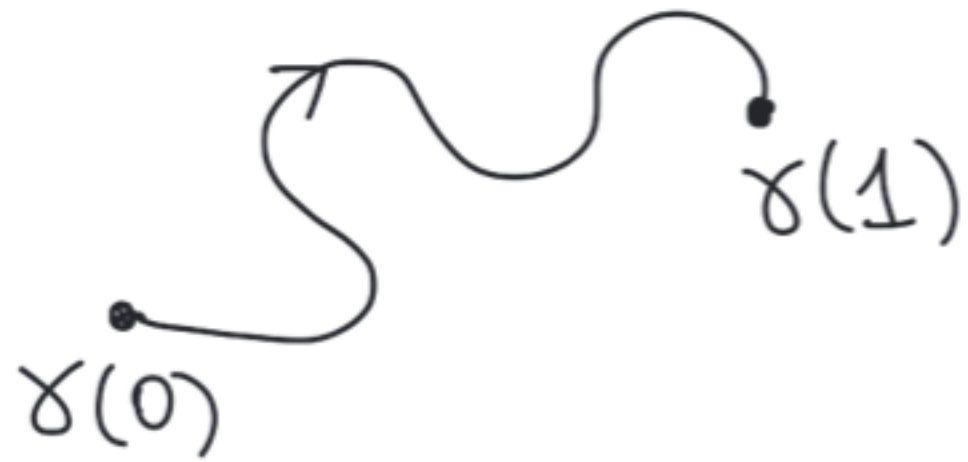


Def Sei X ein topologischer Raum. Unter einem WEG in X verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma: [0,1] \rightarrow X$.



Der ANFANGSPUNKT von γ ist $\gamma(0) \in X$.

Der ENDPUNKT von γ ist $\gamma(1) \in X$.

γ heißt GESCHLOSSEN (oder SCHLEIFE)
wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$.



γ heißt KONSTANT wenn $\forall t \in [0,1] \gamma(t) = \gamma(0)$.

Wenn X ein topologischer Raum ist und $x_0, x_1 \in X$,

$$\Omega(X, x_0, x_1) := \{ \gamma: [0,1] \rightarrow X \text{ Weg} \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1 \}$$

Menge von den Wegen von x_0 nach x_1 .

Beispiel $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto (1-t)p + tq$$

ist ein Weg in $\mathbb{R}^n$ von p nach q

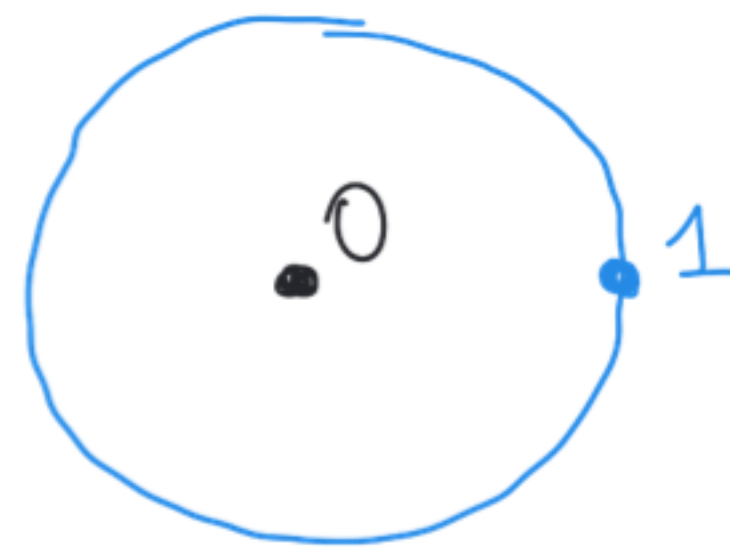


Beispiel $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ Einheitskreis, $n \in \mathbb{Z}$

$$[0, 1] \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto e^{2\pi i n t}$$

ist ein geschlossener
Weg in S^1 , $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$



$n=0 \Rightarrow$ konstanter Weg

$n>0 \Rightarrow$ er wickelt sich n -mal gegen den Uhrzeigersinn auf

$n<0 \Rightarrow$ " " " " $(-n)$ -mal im Uhrzeigersinn auf

Bem Wenn $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha: [a, b] \rightarrow X$ stetig ist, sollte man den Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ betrachten.
$$t \mapsto \alpha((1-t)a + tb)$$

$$\gamma(0) = \alpha(a)$$

$$\gamma(1) = \alpha(b)$$

γ ist die Komposition von α und dem Homöomorphismus $[0, 1] \rightarrow [a, b], t \mapsto (1-t)a + tb$.

So sollte $[0, 1]$ die Definitionsmenge von allen stetigen Abbildungen von einem kompakten Intervall zu X sein.

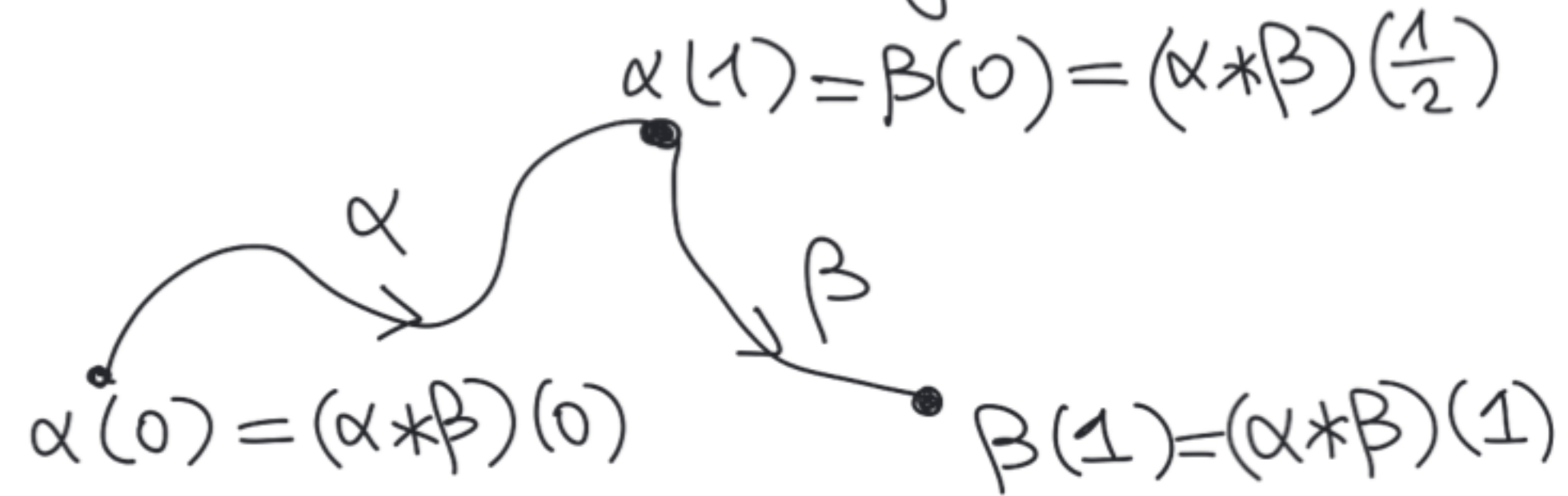
Bem $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ Weg

$\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Homöomorphismus mit $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$
 $\Rightarrow \gamma \circ \varphi: [0, 1] \rightarrow X$ ist ein Weg und heißt ein REPARAMETRISATION von γ .

Def Sei X ein top. Raum und α, β Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$
 Dann definiert man die ZUSAMMENSETZUNG (ANEINANDER
 HÄNGEN / CONCATENATION) von α und β als den Weg

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X$$

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Bem $\alpha * \beta$ ist stetig, weil $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ eine endliche abgeschlossene Überdeckung von $[0, 1]$ ist.

Def X top. Raum, $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ Weg. Der zu α inverse Weg ist

$$i(\alpha) : [0, 1] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \alpha(1-t)$$

$$i(\alpha)(0) = \alpha(1)$$

$$i(\alpha)(1) = \alpha(0)$$

X top. Raum. $x, y, z \in X$.

$$\begin{array}{ccc} *: \Omega(X, x, y) \times \Omega(X, y, z) & \longrightarrow & \Omega(X, x, z) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha * \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} i: \Omega(X, x, y) & \longrightarrow & \Omega(X, y, x) \\ \alpha & \longmapsto & i(\alpha) \end{array}$$

Konstanter Weg $c_x \in \Omega(X, x, x)$

Kann man eine Gruppe davon konstruieren?

Bem $\alpha \in \Omega(X, x, y)$, d.h. α Weg in X mit $\alpha(0)=x, \alpha(1)=y$.

$$c_x: [0,1] \rightarrow X \\ t \mapsto x$$

$$c_y: [0,1] \rightarrow X \\ t \mapsto y \quad \text{konstante Weg}$$

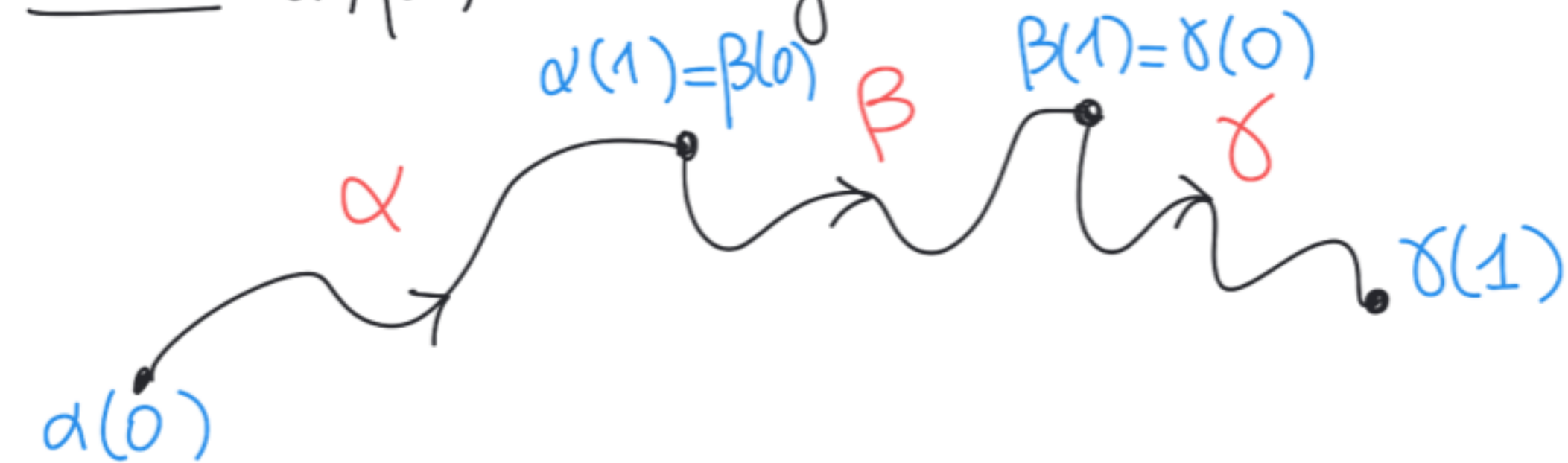
$$c_x * \alpha \neq \alpha, \text{ denn}$$

$$(c_x * \alpha)(t) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha * c_y \neq \alpha, \text{ denn}$$

$$(\alpha * c_y)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Bem α, β, γ Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$



$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t - 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\beta * \gamma)(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} ? & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ? & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ ? & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma).$$

Satz X top. Raum. Sei $\sim_{wz}$ die Relation auf X , die durch

$$\forall x, y \in X, x \sim_{wz} y \Leftrightarrow \Omega(X, x, y) \neq \emptyset$$

definiert ist.

$wz = \text{Weg Zusammenhängend}$

$\Rightarrow \sim_{wz}$ ist eine Äquivalenzrelation auf X .

BWS Reflexivität: $c_x \in \Omega(X, x, x)$

Symmetrie: $\alpha \in \Omega(X, x, y) \Rightarrow i(\alpha) \in \Omega(X, y, x)$

Transitivität: $\alpha \in \Omega(X, x, y), \beta \in \Omega(X, y, z) \Rightarrow \alpha * \beta \in \Omega(X, x, z). \square$

Def Sei X ein topologischer Raum.

Eine WEGZUSAMMENHÄNGENDE KOMPONENTE von X ist eine $\sim_{wz}$ -Äquivalenzklasse.

$\pi_0(X) := \{\text{wegzusammenhängende Komponenten von } X\} = \underbrace{X / \sim_{wz}}_{\text{Quotientenmenge}}$

Def Ein topologischer Raum X heißt WEGZUSAMMENHÄNGEND wenn $X \neq \emptyset$ und es genau eine wegzusammenhängende Komponente gibt.

X wegzusammenhängend $\Leftrightarrow X \neq \emptyset$ und $\forall x, y \in X, \Omega(X, x, y) \neq \emptyset$.

Satz WEGZUSAMMENHÄNGEND $\Rightarrow$ ZUSAMMENHÄNGEND.

BWS $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, A und B offen in X , $A \cap B = \emptyset$.

Nehme $a \in A$, $b \in B$.
 X WEGZUSAMMENHÄNGEND $\Rightarrow \exists \alpha: [0, 1] \rightarrow X$ Weg von a nach b .
 α stetig $\Rightarrow \alpha^{-1}(A)$ und $\alpha^{-1}(B)$ offen in $[0, 1]$.

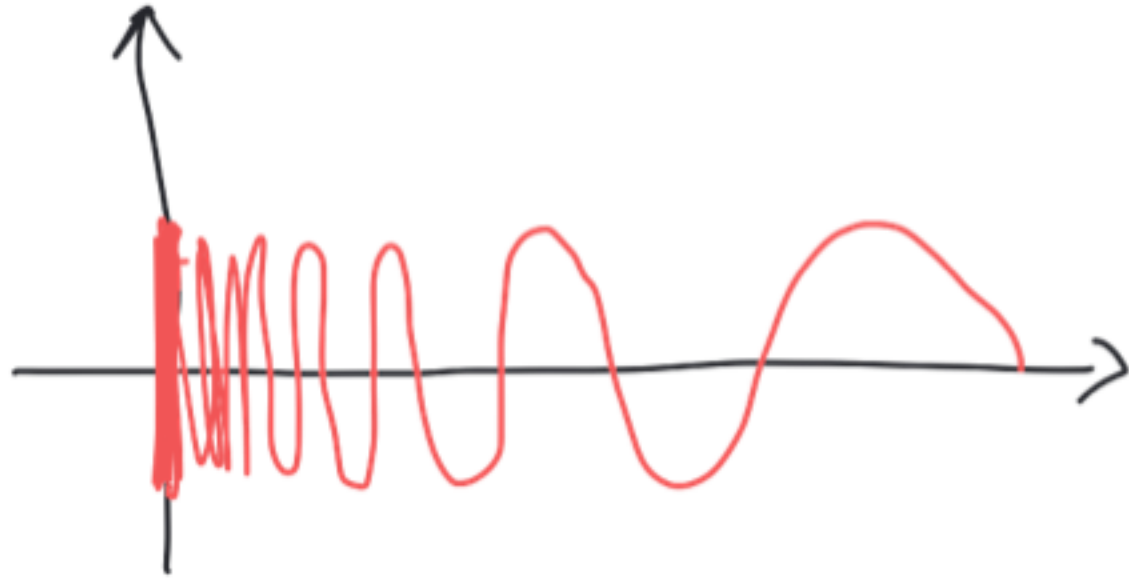
$0 \in \alpha^{-1}(A)$, $1 \in \alpha^{-1}(B)$, $\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) = \alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Das ist nicht möglich, weil $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

Deshalb ist X zusammenhängend. $\square$

Beispiel $X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

X ist zusammenhängend und nicht wegzusammenhängend.



Def Sei $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Weg in $\mathbb{R}^N$.

γ heißt TEILWEISE C^1 , wenn es $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=1$ gibt, sodass $\forall i=1, \dots, n$ die Abbildung $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^N$ C^1 ist.



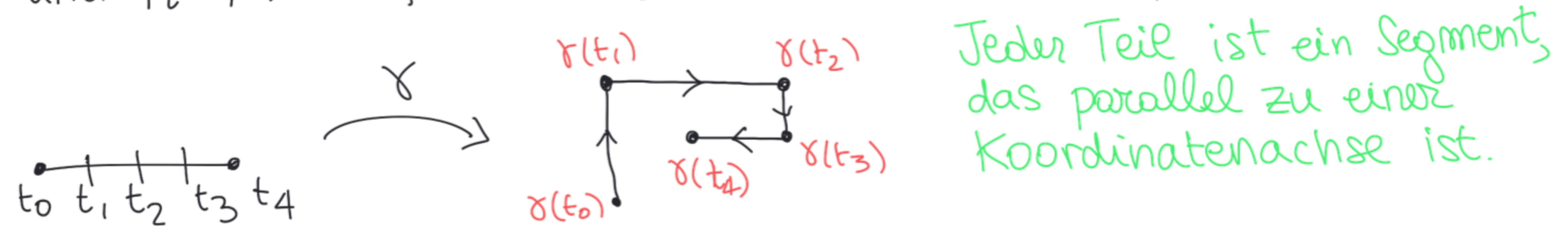
γ heißt TEILWEISE AFFIN, wenn es $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=1$ gibt, sodass $\forall i=1, \dots, n$, $\exists v_i, w_i \in \mathbb{R}^N$: $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$, $\gamma(t) = t v_i + w_i$.

Jeder Teil ist ein Segment



$e_1, \dots, e_N$ Standardbase von $\mathbb{R}^N$. Ich habe die folgende Definition ersinnen

Def Ein Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ heißt TEILWEISE STARK AFFIN, wenn es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ gibt, sodass $\forall i = 1, \dots, n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, w_i \in \mathbb{R}^N$ und $p_i \in \{1, \dots, N\} : \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \gamma(t) = \lambda_i t e_{p_i} + w_i$.



Def $X \subseteq \mathbb{R}^N$ Teilmenge, $x, y \in X$.

$\Omega(X, x, y) = \{ \gamma \text{ Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y \}$

$\Omega_{t.c^1}(X, x, y) = \{ \gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \gamma \text{ ist teilweise } C^1 \}$

$\Omega_{t.\text{aff}}(X, x, y) = \{ \gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \gamma \text{ ist teilweise affin} \}$

$\Omega_{t.s.\text{aff}}(X, x, y) = \{ \gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \gamma \text{ ist teilweise stark affin} \}$

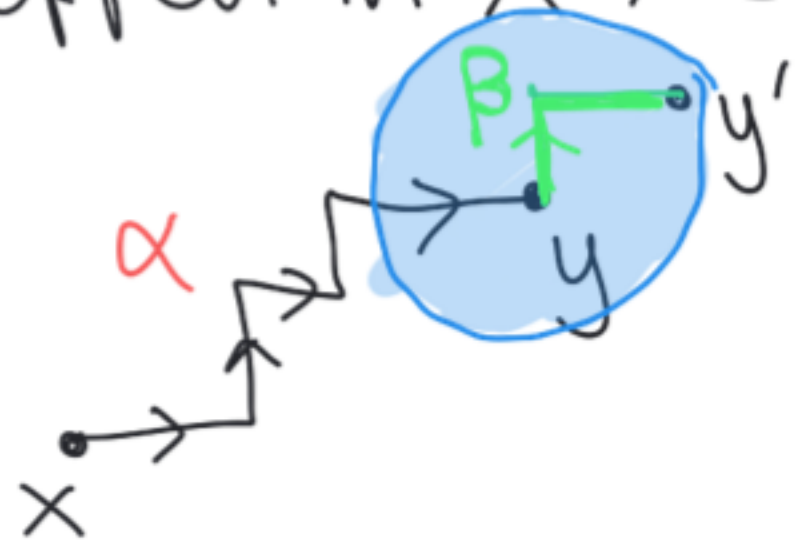
Satz $X \subseteq \mathbb{R}^N$ offene zusammenhängende Teilmenge.

$$\Rightarrow \forall x, y \in X, \Omega_{\text{t.s.aff}}(X, x, y) \neq \emptyset$$

Deshalb ist X Wegzusammenhängend.

Bws Sei $x \in X$ fest. Betrachte $A = \{y \in X \mid \Omega_{\text{t.s.aff}}(X, x, y) \neq \emptyset\}$.

A offen in X : sei $y \in A$. Sei $\alpha \in \Omega_{\text{t.s.aff}}(X, x, y)$.



$X \subseteq \mathbb{R}^N$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(y) \subseteq X$. Sei $y' \in B_\varepsilon(y)$

Es ist einfach, einen Weg $\beta \in \Omega_{\text{t.s.aff}}(B_\varepsilon(y), y, y')$ zu finden.

$$\alpha * \beta \in \Omega_{\text{t.s.aff}}(U, x, y') \Rightarrow y' \in A$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(y) \subseteq A.$$

A abgeschlossen in X : ähnlicher Beweis.

$A \neq \emptyset$: $x \in A$, weil $c_x \in \Omega_{\text{t.s.aff}}(X, x, x)$.

X zusammenhängend $\Rightarrow A = X$. $\square$