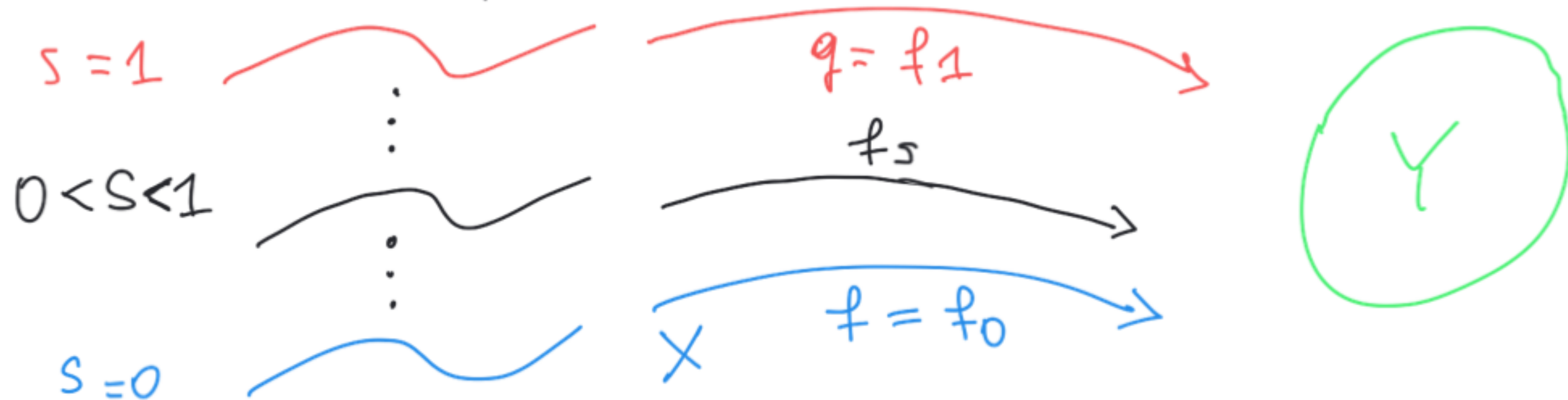


Diese Folie ist informell. Seien  $X$  und  $Y$  zwei top. Räume.  
Seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: X \rightarrow Y$  zwei stetige Abbildungen.

Was bedeutet, dass  $f$  sich in  $g$  verformen kann? Was ist eine Verformung / Deformation zwischen  $f$  und  $g$ ? Wann ist diese Verformung stetig?

Eine Verformung von  $f$  nach  $g$  sollte ein "Weg von stetigen Abbildungen  $X \rightarrow Y$ ", d.h. eine Familie  $(f_s: X \rightarrow Y)_{s \in [0,1]}$  sodass:

- $\forall s \in [0,1], f_s: X \rightarrow Y$  ist stetig
- $f_0 = f$  und  $f_1 = g$ .



Eine Familie  $(f_s: X \rightarrow Y)_{s \in [0,1]}$  ist genau eine Abbildung  
 $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$

$$\rightarrow) F(x,s) = f_s(x) \quad \forall x \in X, \forall s \in [0,1]$$

$$\leftarrow) f_s = F(\cdot, s) \quad \forall s \in [0,1], \text{ d.h. } \forall s \in [0,1], \forall x \in X, f_s(x) = F(x,s).$$

Eine Familie  $(f_s: X \rightarrow Y)_{s \in [0,1]}$  von stetigen Abbildung ist stetig (d.h. die "Verformung" findet mit Kontinuität statt), wenn die korrespondierende Abbildung  $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$  stetig ist.

Bis jetzt war ich sehr informell. Von jetzt an werde ich formell sein.

Def Seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume und seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: X \rightarrow Y$  zwei stetige Abbildungen.

- $f$  und  $g$  heißen HOMOTOP und man schreibt  $f \sim g$ , wenn es eine HOMOTOPIE zwischen ihnen gibt, d.h. eine stetige Abbildung  $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$  mit:
  - $F(\cdot, 0) = f$ , d.h.  $\forall x \in X, F(x, 0) = f(x)$
  - $F(\cdot, 1) = g$ , d.h.  $\forall x \in X, F(x, 1) = g(x)$ .
- Sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge, sodass  $f|_A = g|_A$  gilt.  
 $f$  und  $g$  heißen HOMOTOP RELATIV ZU  $A$  ( $f \sim_A g$ ), wenn es eine stetige Abbildung  $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$  gibt, sodass:
  - $F(\cdot, 0) = f$
  - $F(\cdot, 1) = g$
  - $\forall a \in A, \forall s \in [0,1], F(a, s) = f(a) = g(a)$ .

Beispiel  $X$  top. Raum.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

Dann sind  $f$  und  $g$  homotop:

$$F: X \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, s) \longmapsto (1-s)f(x) + s \cdot g(x).$$

ist eine Homotopie  
zwischen  $f$  und  $g$

Beispiel  $X = \{x\}$ ,  $Y = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$ .

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto i$$

$$g: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto -i$$



$f$  und  $g$  sind nicht homotop. Gäbe es eine Homotopie

$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zwischen  $f$  und  $g$ , dann wäre

$$[0, 1] \rightarrow Y$$

$$s \mapsto F(x, s)$$

ein Weg in  $Y$  von  $i$  nach  $-i$ .

Satz  $X, Y$  top. Räume,  $A \subseteq X$ ,  $\varphi: A \rightarrow Y$  stetig  
 $\Rightarrow \sim_A$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge  
 $\{f: X \rightarrow Y \text{ stetig} \mid f|_A = \varphi\}$ .

Bws Reflexivität: konstante Homotopie  $F(x, s) = f(x)$ .

Symmetrie: sei  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$  relativ zu  $A$ . Dann ist die inverse Homotopie  
 $X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $g$  und  $f$   
 $(x, s) \mapsto F(x, 1-s)$  relativ zu  $A$ .

Transitivität:  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  Homotopie von  $f$  nach  $f_1$  relativ zu  $A$   
 $G: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  " " "  $f_1$  "  $g$  " " "

Man betrachte die Zusammensetzung  $F * G: X \times [0, 1] \rightarrow Y$   
 $(F * G)(x, s) = \begin{cases} F(x, 2s) & x \in X, 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2s-1) & x \in X, \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$  Sie ist eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  relativ zu  $A$   $\square$

Satz  $X, Y, Z$  drei topologische Räume,  $A \subseteq X$ .

$f_0: X \rightarrow Y, f_1: X \rightarrow Y$  stetig und homotop relativ zu  $A$   
 $g_0: Y \rightarrow Z, g_1: Y \rightarrow Z$  stetig und homotop relativ zu  $f_0(A)$   
 $\Rightarrow g_0 \circ f_0$  und  $g_1 \circ f_1$  sind homotop relativ zu  $A$ .

BWS Hausaufgabe!

Def Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen heißt eine HOMOTOPIEÄQUIVALENZ zwischen  $X$  und  $Y$ , wenn sie ein Homotopieinverses besitzt, d.h. eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g \sim \text{id}_Y$  und  $g \circ f \sim \text{id}_X$ .

Def Zwei topologische Räume heißen HOMOTOPIEÄQUIVALENT, wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt.

Def Ein topologischer Raum heißt ZUSAMMENZIEHBAR, wenn er zum einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist.

Beispiel  $Y = \{y\}$  der einpunktige topologische Raum.

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \\ x \longmapsto y$$

$$g: Y \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y \longmapsto 0$$

$$f \circ g = \text{id}_Y$$

$$g \circ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto 0$$

ist homotop zu  $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ :

$$\mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,s) \longmapsto sx$$

$\Rightarrow f$  und  $g$  sind Homotopieäquivalenzen  
 $\Rightarrow \mathbb{R}^n$  ist zusammenziehbar

Def Sei  $X$  ein topologischer Raum, sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge und sei  $i: A \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung.

- $A$  heißt RETRAKT von  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung  $\pi: X \rightarrow A$  gibt, sodass  $\pi \circ i = \text{id}_A$ , d.h.  $\forall a \in A \quad \pi(a) = a$ .
- $A$  heißt DEFORMATIONSTRAKT von  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung  $R: X \times [0,1] \rightarrow X$  gibt, sodass:
  - $R(\cdot, 1) = \text{id}_X$ , d.h.  $\forall x \in X, R(x, 1) = x$
  - $\forall x \in X, R(x, 0) \in A$
  - $\forall s \in [0,1], \forall a \in A, R(a, s) = a$ .

Bem Deformationsretrakt  $\Rightarrow$  Retrakt:

$$\pi = R(\cdot, 0): X \rightarrow A$$

Satz  $X$  top. Raum,  $A \subseteq X$  Deformationsretrakt.

$\Rightarrow$  die Inklusionsabbildung  $i: A \hookrightarrow X$  ist eine Homotopieäquivalenz.

Bws Sei  $R: X \times [0,1] \rightarrow X$  stetig, sodass  $R(\cdot, 1) = \text{id}_X$ ,  
 $\forall x \in X \ R(x, 0) \in A$  und  $\forall s \in [0,1], \forall a \in A, R(a, s) = a$  gelten

Sei  $\pi: X \rightarrow A, x \mapsto R(x, 0)$ .

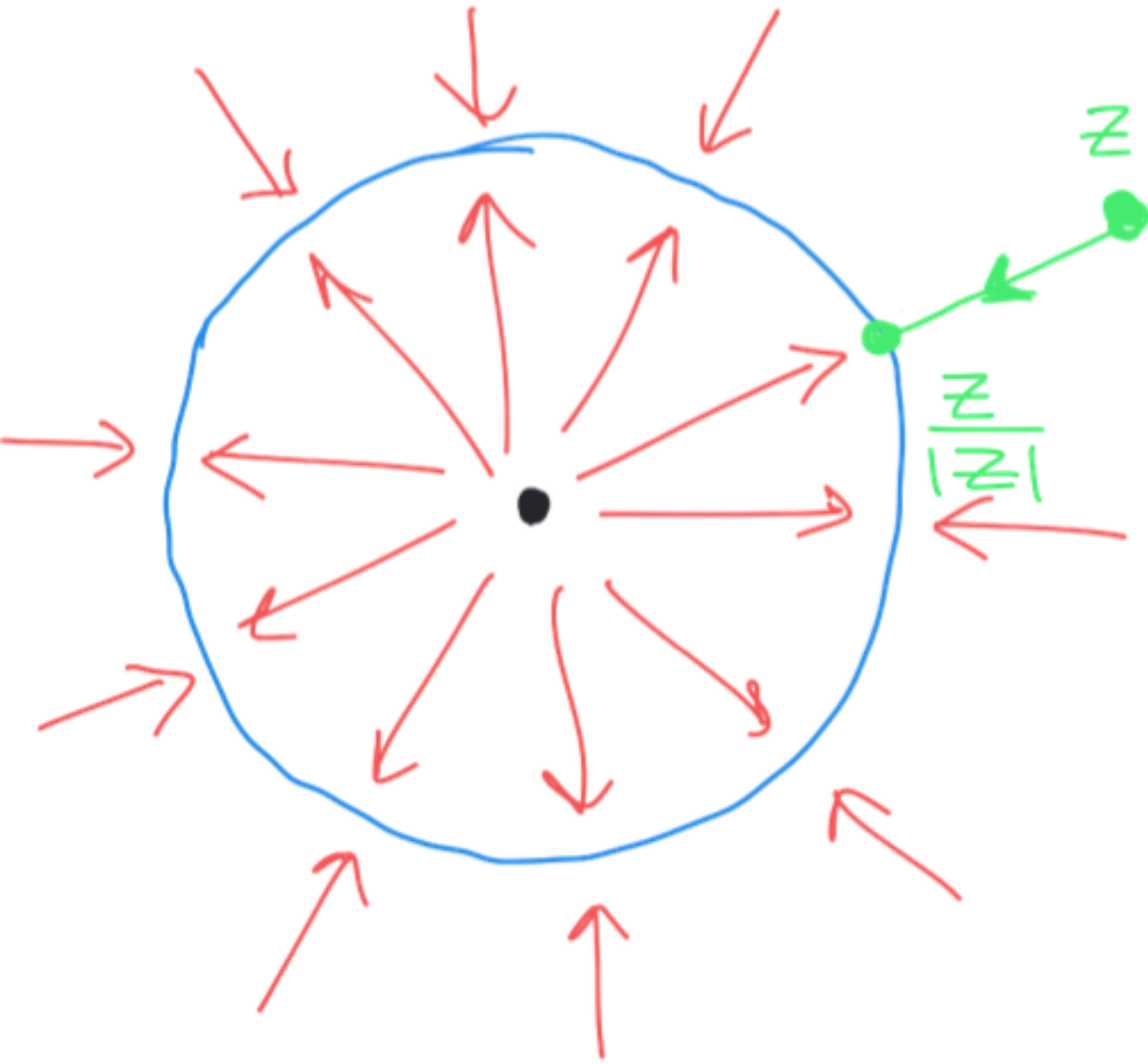
$\pi \circ i = \text{id}_A$ , denn  $\forall a \in A \ (\pi \circ i)(a) = \pi(a) = R(a, 0) = a$

$R$  ist eine Homotopie von  $i \circ \pi = R(\cdot, 0)$  nach  $R(\cdot, 1) = \text{id}_X$

$\Rightarrow i \circ \pi$  und  $\text{id}_X$  sind homotop.

$\Rightarrow i$  und  $\pi$  sind Homotopieäquivalenzen.  $\square$

Beispiel  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .



$$R: \mathbb{C}^* \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(z, s) \mapsto (1-s) \frac{z}{|z|} + sz$$

$R$  ist stetig

- $\forall z \in \mathbb{C}^*, R(z, 1) = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, R(z, 0) = \frac{z}{|z|} \in S^1$
- $\forall z \in S^1, \forall s \in [0, 1], R(z, s) = z$ .

$\forall z \in \mathbb{C}^*, R(z, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist das Segment zwischen  $z$  und  $\frac{z}{|z|}$

Genereller:

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$   $n$ -dimensionale Sphäre

$S^n$  ist ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ :

$$R: (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$(x, s) \longmapsto (1-s) \frac{x}{\|x\|} + sx$$

$\Rightarrow S^n$  und  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sind homotopieäquivalent.

Wir werden sehen, dass  $S^1$  nicht zusammenziehbar ist.

Wenn  $n \geq 2$ , ist  $S^n$  nicht zusammenziehbar, aber wir können nicht das in diesem Kurse beweisen. Man braucht Algebraische Topologie.

Bemerkung Viele topologische Eigenschaften werden nicht durch Homotopieäquivalenz erhalten.

z.B.:  $S^n$  und  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sind homotopieäquivalent,  
 $S^n$  ist kompakt,  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  ist nicht kompakt.