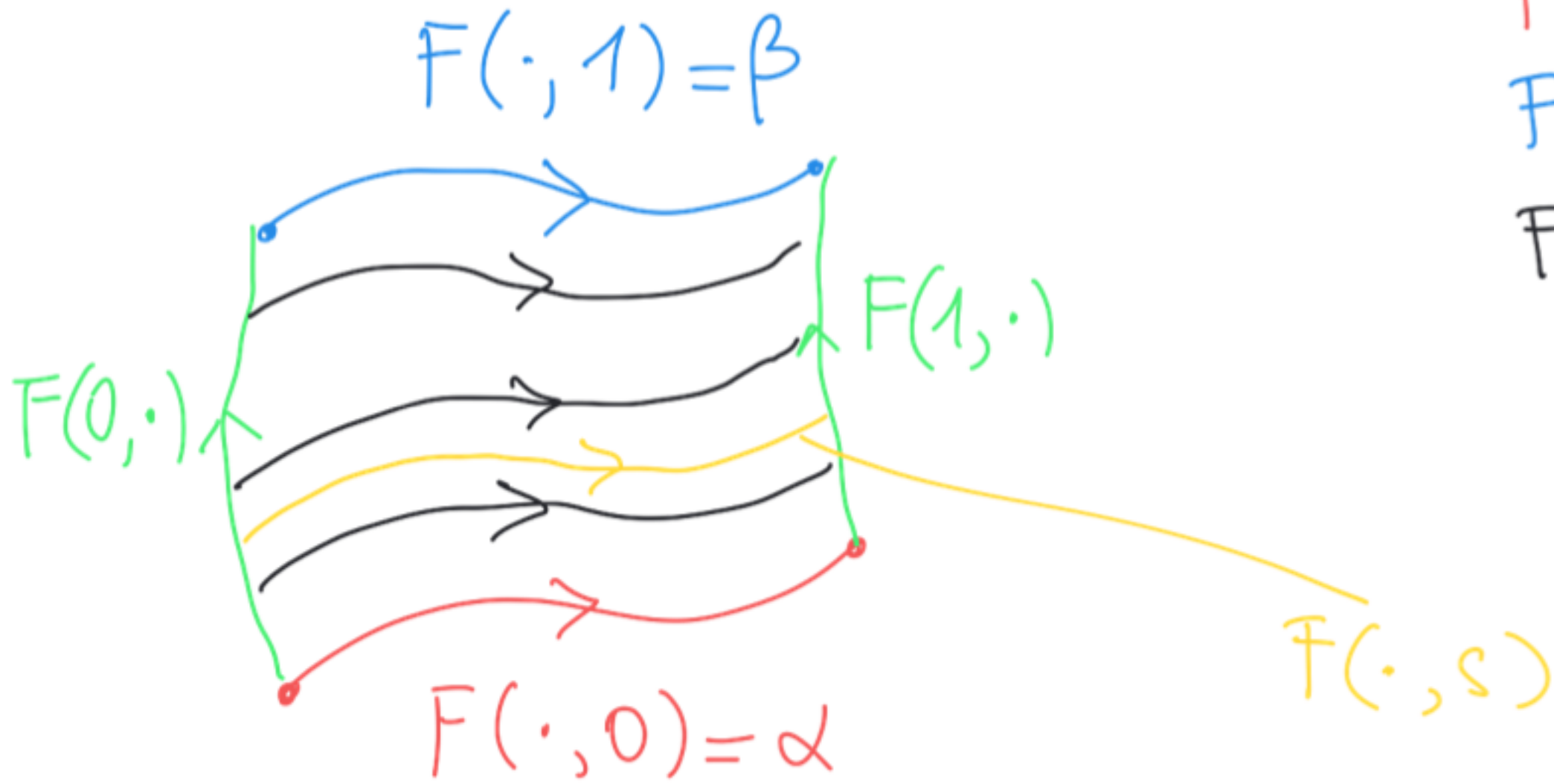


X top. Raum

$\alpha: [0,1] \rightarrow X$, $\beta: [0,1] \rightarrow X$ Wegen. Sie sind
homotop wenn es $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ gibt, sodass



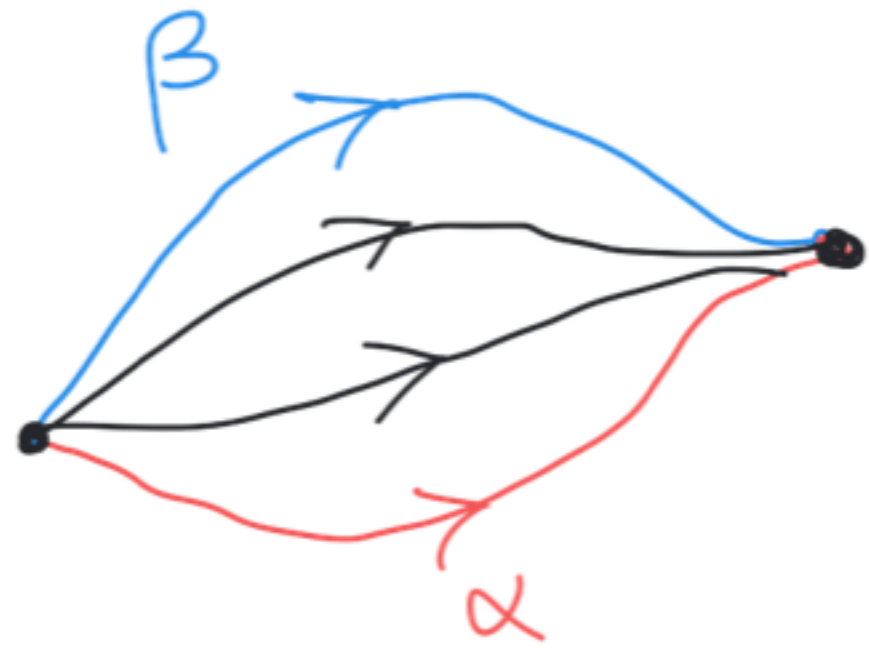
$$F(.,0) = \alpha$$

$$F(.,1) = \beta$$

F stetig

In der folgenden
Definition wollen wir,
dass die Wegen $F(0,.)$ und
 $F(1,.)$ konstant sind.

Def Sei X ein topologischer Raum und seien $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ und $\beta: [0,1] \rightarrow X$ zwei Wegen. α und β heißen WEG-HOMOTOP, wenn sie homotop relativ zu $\{0,1\}$ sind, d.h.:



$\exists F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ stetig:

- $F(\cdot, 0) = \alpha$, d.h. $\forall t \in [0,1], F(t, 0) = \alpha(t)$
- $F(\cdot, 1) = \beta$, d.h. $\forall t \in [0,1], F(t, 1) = \beta(t)$
- $F(0, \cdot)$ und $F(1, \cdot)$ sind konstant, d.h.
 $\forall s \in [0,1] \quad F(0, s) = F(0, 0) \text{ und } F(1, s) = F(1, 0).$

Wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn α und β weg-homotop sind.

Beispiel $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convex

$\alpha: [0,1] \rightarrow X$ und $\beta: [0,1] \rightarrow X$ Wegen mit $\alpha(0) = \beta(0)$
und $\alpha(1) = \beta(1)$

$\Rightarrow \alpha$ und β sind Weg-homotop

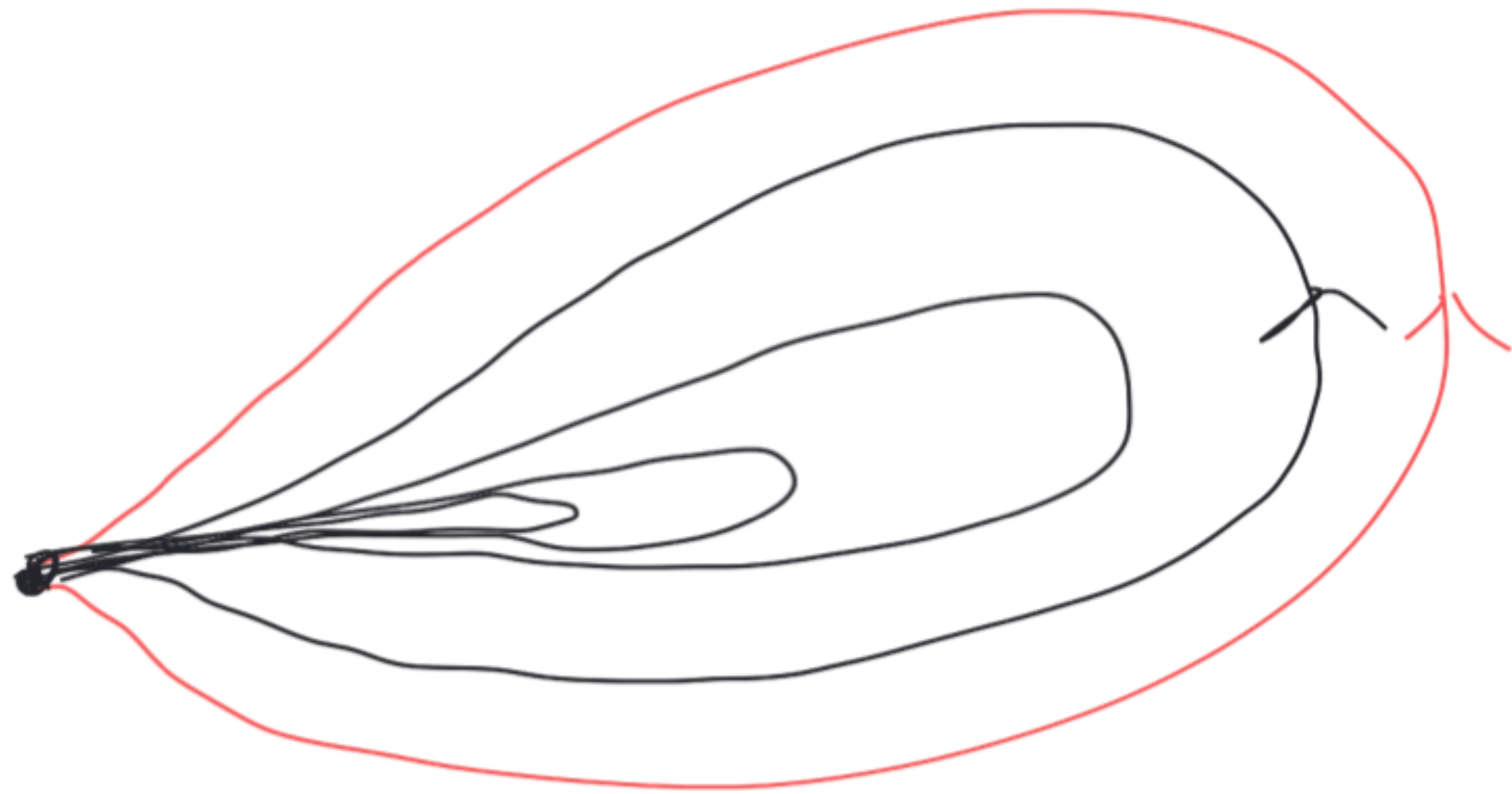
$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$$

$$(t,s) \mapsto (1-s)\alpha(t) + s \cdot \beta(t)$$

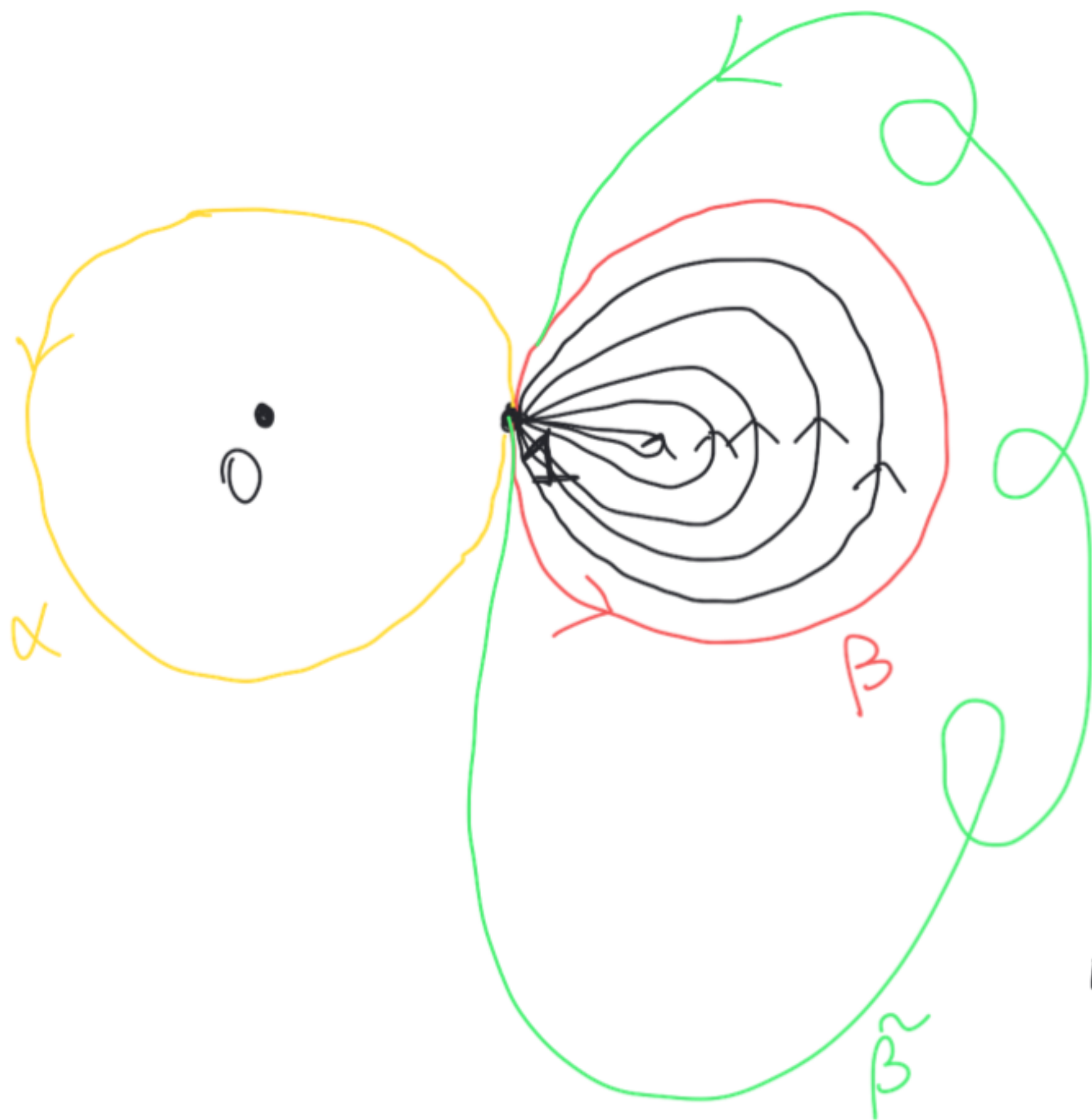
Wohldefiniert, weil $\forall t \in [0,1]$ die Strecke zwischen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ eine Teilmenge von X ist.

Kor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convex, $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ Schleife (d.h. Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1)$).
 $\Rightarrow \alpha$ ist weg-homotop zum konstanten Weg $[0,1] \rightarrow X$
 $t \mapsto \alpha(0)$

z.B.: $X = \mathbb{R}^2$



Beispiel $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$



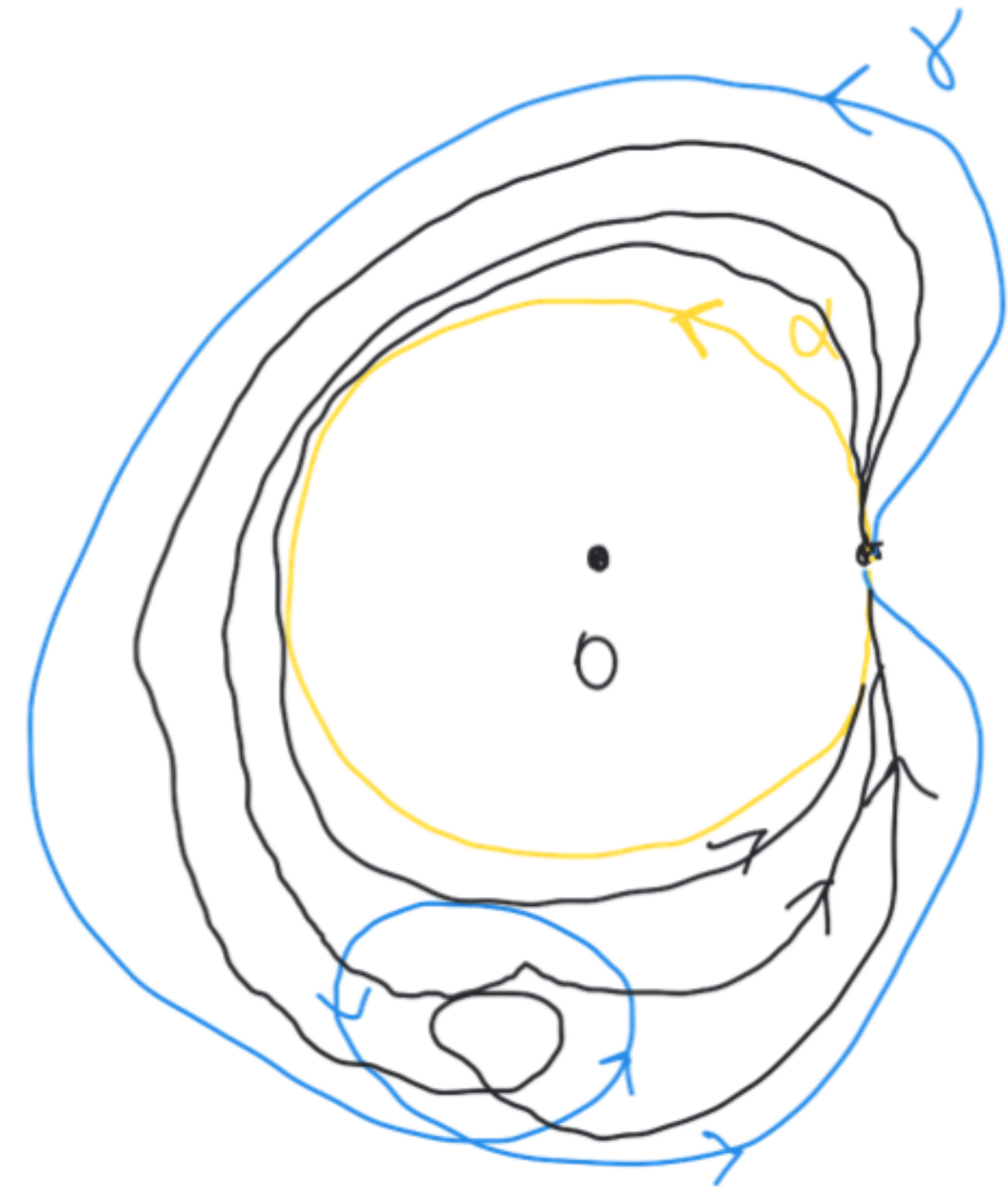
$\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ Einheitskreis
 $t \mapsto e^{2\pi i t}$

$\beta: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $t \mapsto 2 - e^{2\pi i t}$

$(\tilde{\beta})$
 β ist Weg-homotop zum
konstant Weg c_1

" α ist nicht zusammenziehbar
in $\mathbb{C}^*$ "

$$X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

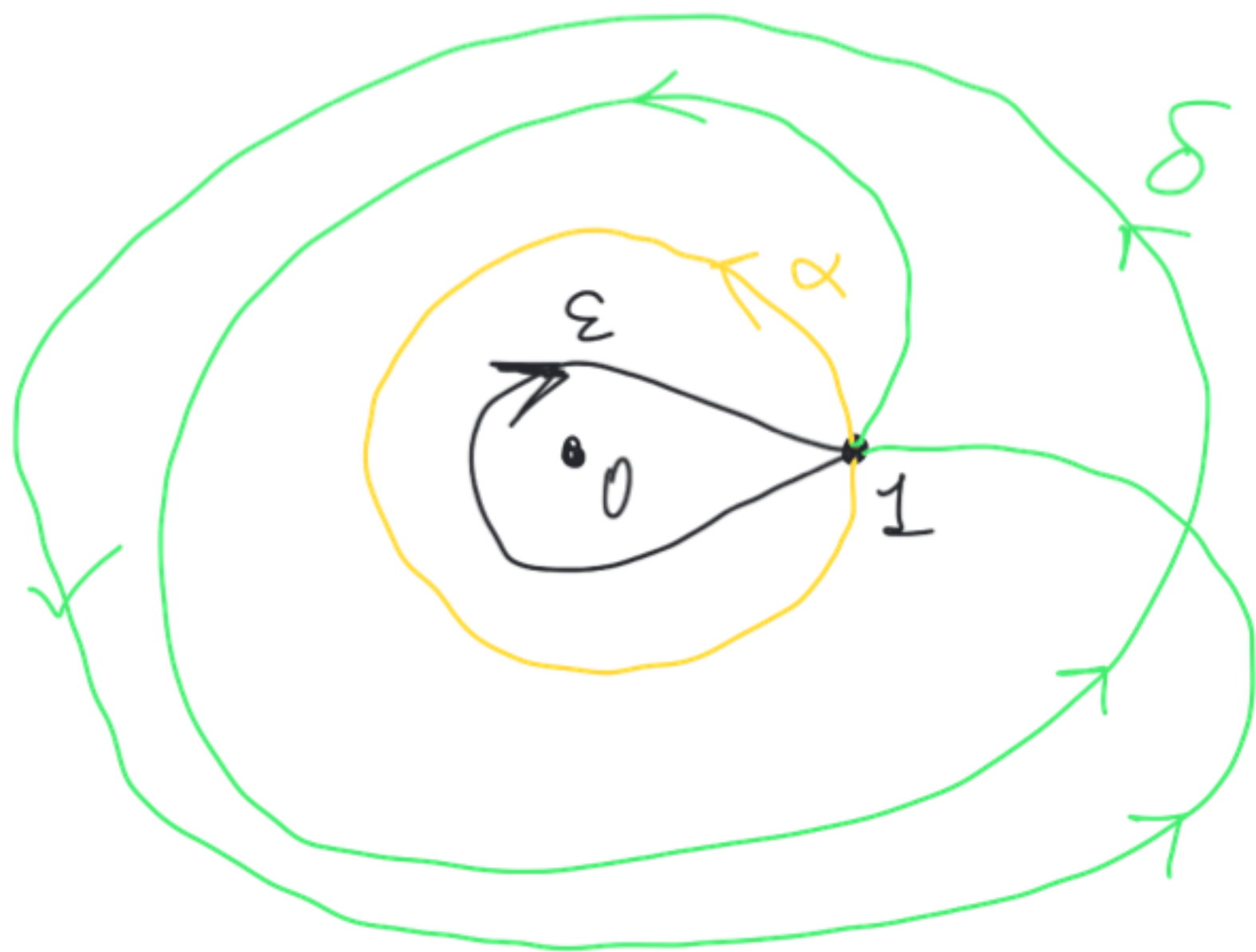


$$\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \mapsto e^{2\pi i t}$$

$\Rightarrow \alpha$ und γ sind
weg-homotop

$$X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$



$$\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \mapsto e^{2\pi i t}$$

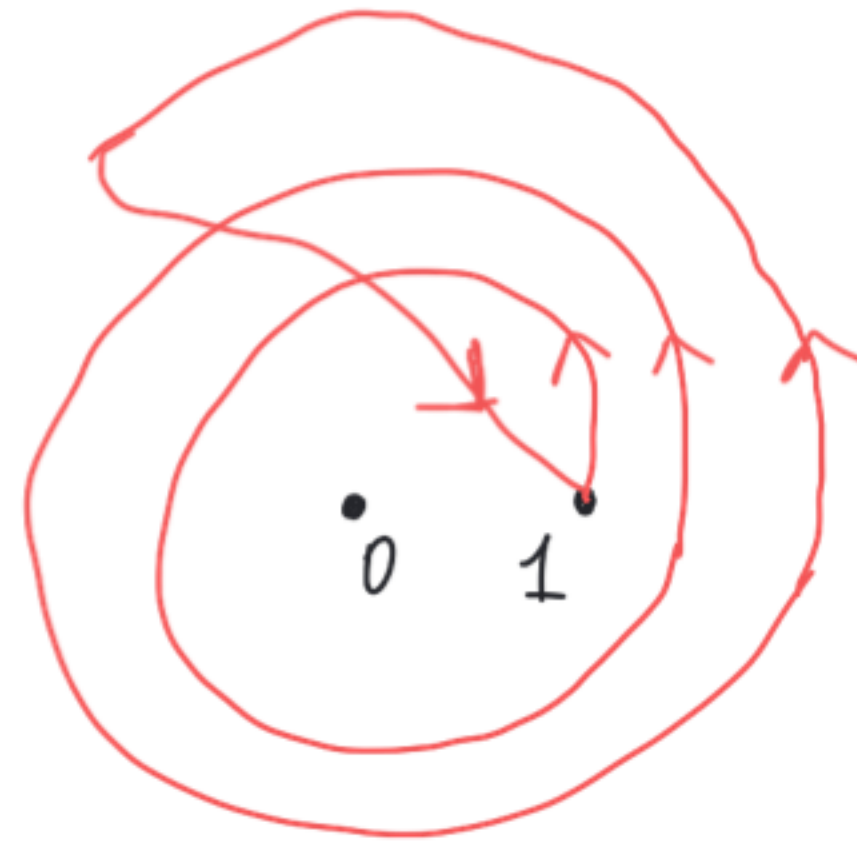
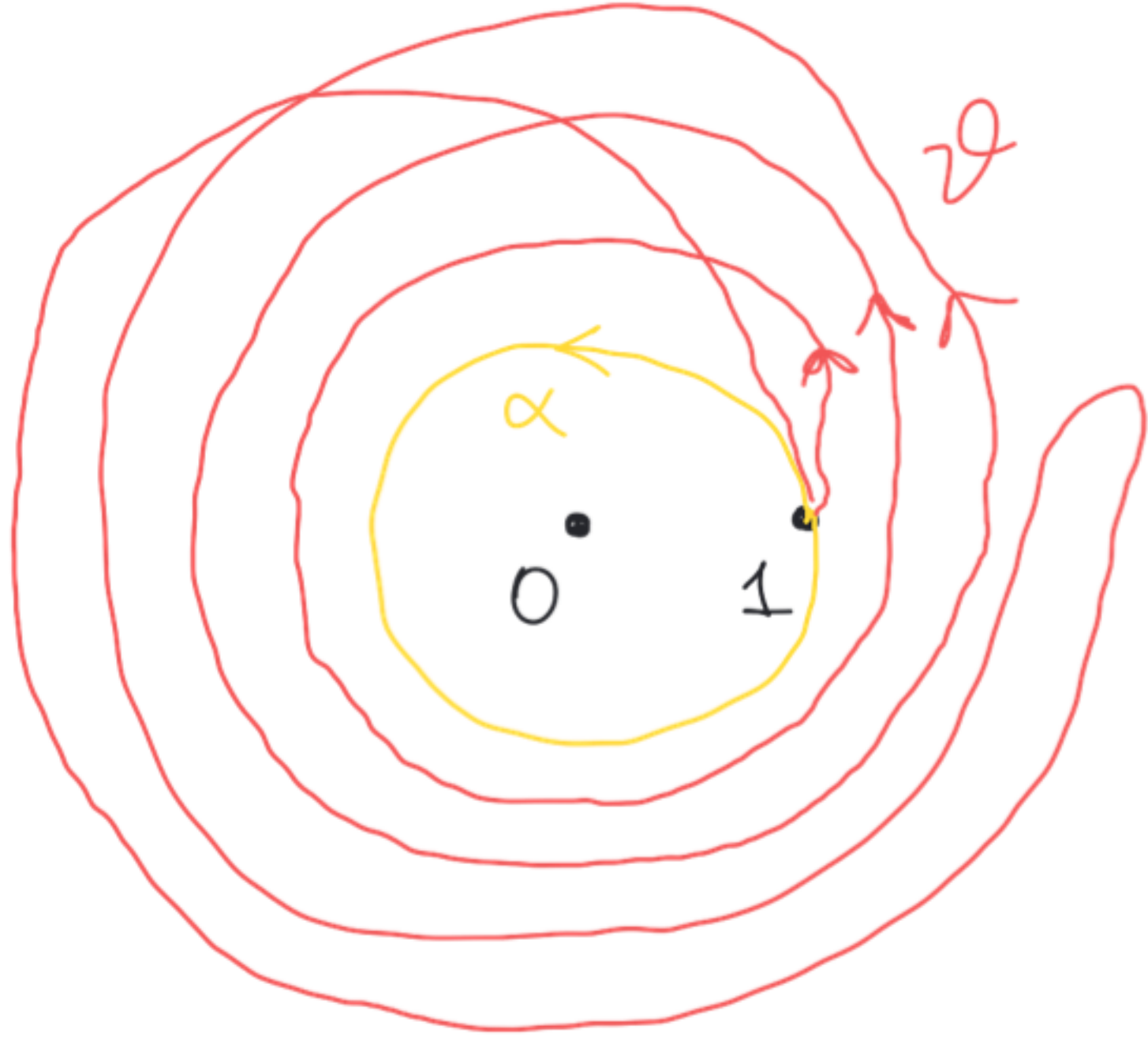
ε und $\iota(\alpha)$ sind weg-homotop

δ und $\alpha * \alpha$ sind weg-homotop

$$X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \mapsto e^{2\pi i t}$$



$$\Rightarrow v \simeq \alpha * \alpha$$

Lemma X top. Raum, $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ Weg
 $\phi: [0,1] \rightarrow [0,1]$ stetig mit $\phi(0)=0$ und $\phi(1)=1$.
 $\Rightarrow \alpha \simeq \alpha \circ \phi$

Beweis $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$
 $(t,s) \mapsto \alpha(s\phi(t) + (1-s)t)$

$$F(t,0) = \alpha(t)$$

$$F(t,1) = \alpha(\phi(t))$$

$$F(0,s) = \alpha(s\phi(0)) = \alpha(0)$$

$$F(1,s) = \alpha(s\phi(1) + 1-s) = \alpha(1).$$

□

The reparametrisation of a path α is path-homotopic to α .

Satz X top. Raum.

- 1) $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$, $\beta, \beta' \in \Omega(X, b, c)$, $\alpha \simeq \alpha'$, $\beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.
- 2) $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$, $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \iota(\alpha) \simeq \iota(\alpha')$
- 3) $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$, $\gamma \in \Omega(X, c, d) \Rightarrow \alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$
- 4) $\alpha \in \Omega(X, a, b) \Rightarrow c_a * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * c_b$ konstante Wege
- 5) $\alpha \in \Omega(X, a, b) \Rightarrow \alpha * \iota(\alpha) \simeq c_a$, $\iota(\alpha) * \alpha \simeq c_b$

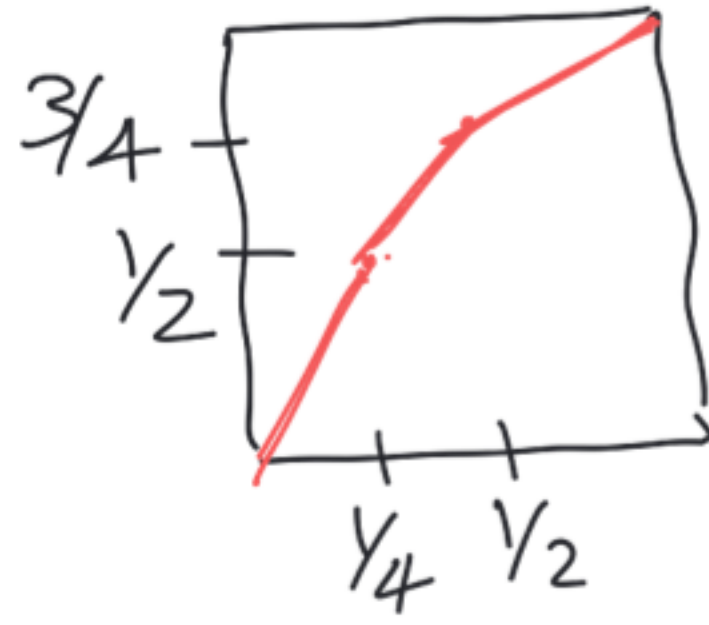
Bws 1) $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ Weg-Homotopie zwischen α und α'
 $G: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ " " " " β β'

Nehme die Zusammensetzung von F und G :
 $F * G: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ $F(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1, s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

2) $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ Weg-Homotopie zwischen α und α'
 $\iota(F): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (t, s) \mapsto F(1-t, s)$ Weg-Homotopie zw. $i(\alpha)$ und $i(\alpha')$

3) $\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ \phi$ mit $\phi: [0,1] \rightarrow [0,1]$

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{4} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

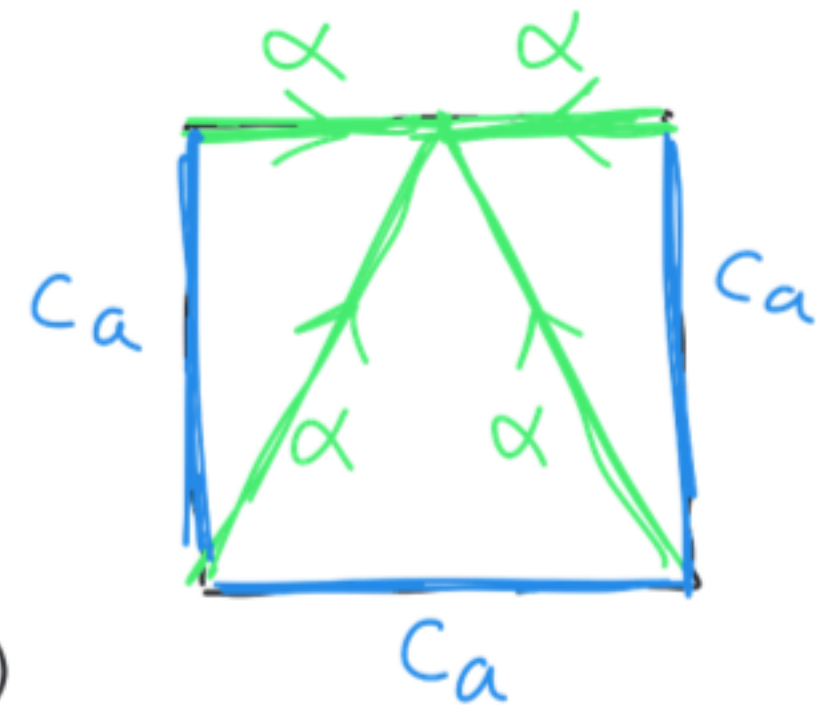


Benutze Lemma.

4) $c_a * \alpha = \alpha \circ \psi$ mit $\psi: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\psi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t-1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$\alpha * c_b = \alpha \circ ?$...

5) $F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq s/2 \\ \alpha(s) & s/2 \leq t \leq 1-s/2 \\ \alpha(2-2t) & 1-s/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$



Weg-Homotopie zwischen c_a und $\alpha * i(\alpha)$

Ähnlich für $i(\alpha) * \alpha \simeq c_b$.

□

Def Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$ ein Punkt. Die FUNDAMENTALGRUPPE (oder die erste Homotopiegruppe) von X in x_0 ist die Menge

$$\pi_1(X, x_0) := \frac{\Omega(X, x_0, x_0)}{\simeq} = \frac{\{\text{Wegen in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x_0\}}{\text{Weg-Homotopie}}$$

Die Elemente von $\pi_1(X, x_0)$ sind die Weg-Homotopieklassen von Wegen in X mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_0 .

Wenn $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ ist, symbolisiert $[\gamma]$ die Weg-Homotopieklasse von γ .

Satz X top. Raum, $x_0 \in X$. $\Rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe mit

$$\cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha * \beta]$$

Bws Wohldefiniert: 1) im vorherigen Satz

Assoziativität: 3)

Existenz des neutralen Elements: $[c_{x_0}]$ 4)

Existenz des inversen Elements: $[\alpha]^{-1} = [\iota(\alpha)]$ 5). $\square$

Beispiel $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convex, $x_0 \in X$

$\Rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist die triviale Gruppe, d.h. die Gruppe mit nur ein Element

Jede Schleife γ in X mit Basispunkt x_0 ist weg-homotop zum konstanten Weg $[c_{x_0}]$.

Deshalb $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$