

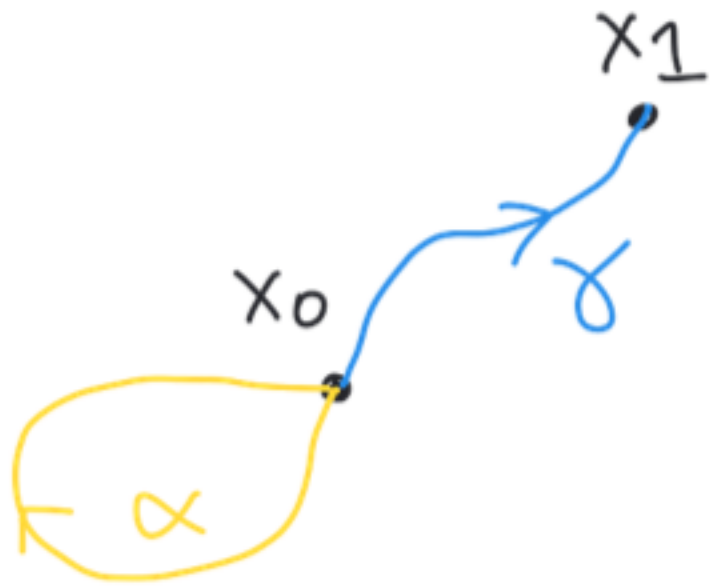
Was passiert, wenn man den Basispunkt ändern?

Satz X top. Raum, $x_0, x_1 \in X$, $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_1) \Rightarrow$

$$\gamma_{\#}: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[\alpha] \longmapsto [\iota(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

ist eine Gruppenisomorphismus.



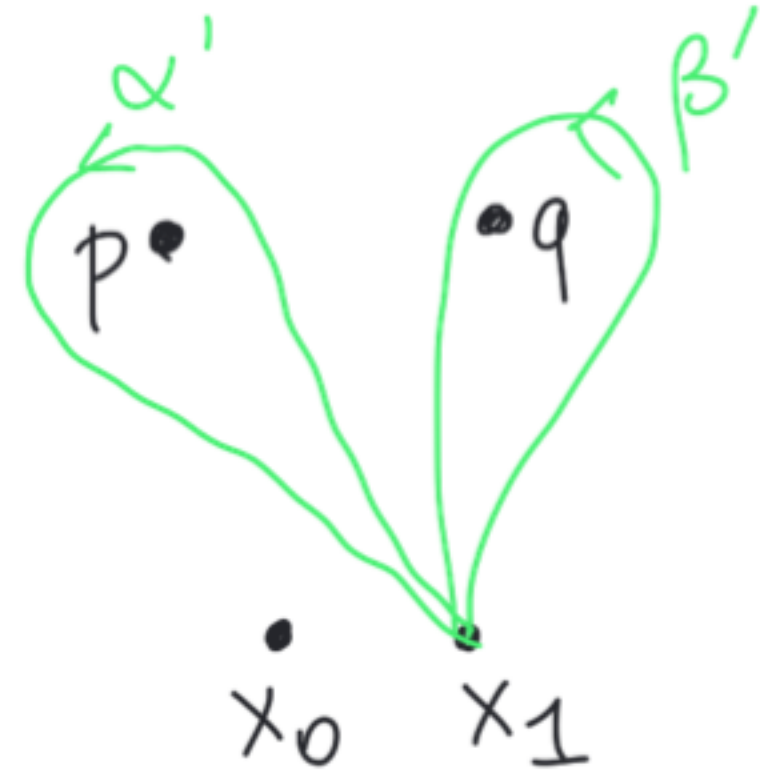
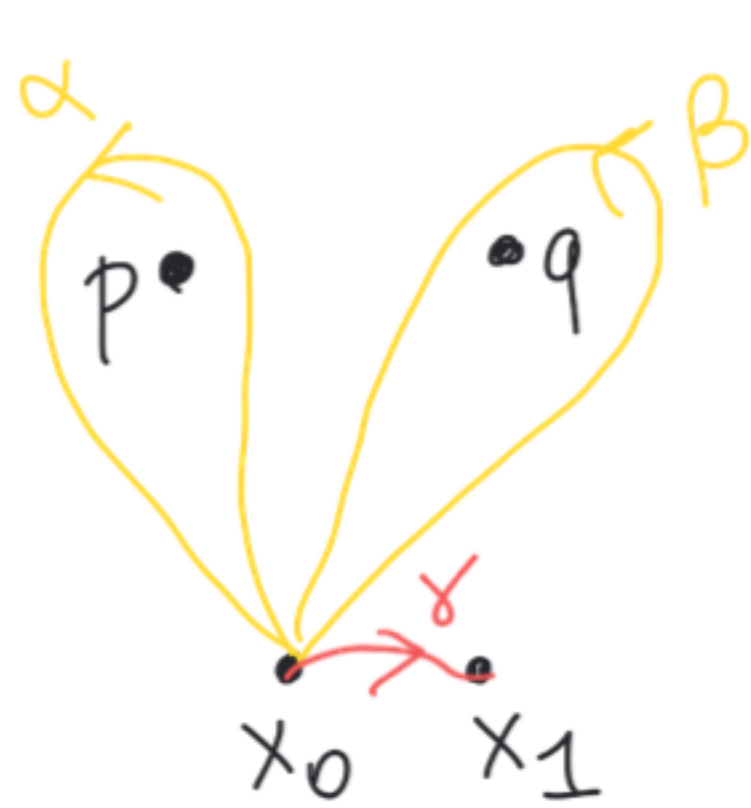
Bws Wohldefiniert und Gruppenhomomorphismus: einfach nach den Eigenschaften, die wir schon bewiesen haben: z.B.

$$\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \alpha * \gamma \simeq \alpha' * \gamma \Rightarrow \iota(\gamma) * (\alpha * \gamma) \simeq \iota(\gamma) * (\alpha' * \gamma)$$

$\iota(\gamma)_{\#}: \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist der inverse Gruppenhomomorphismus von $\gamma_{\#}$
 $[\beta] \longmapsto [\gamma * \beta * \iota(\gamma)]$

□

Beispiel $p, q \in \mathbb{C}, p \neq q, X = \mathbb{C} \setminus \{p, q\}, x_0, x_1 \in X$



$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

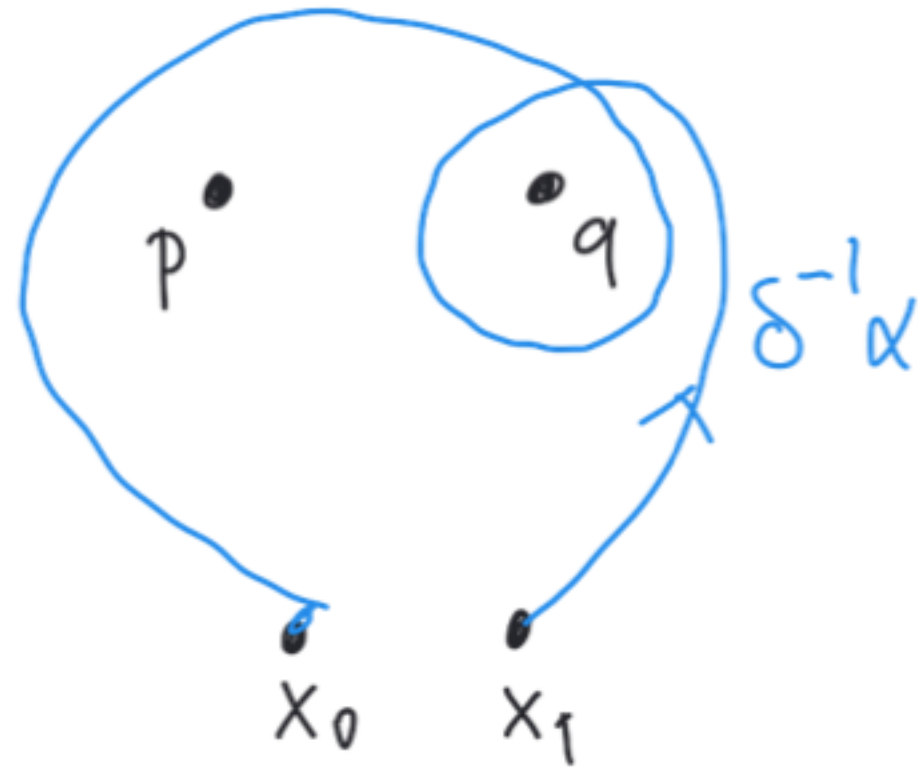
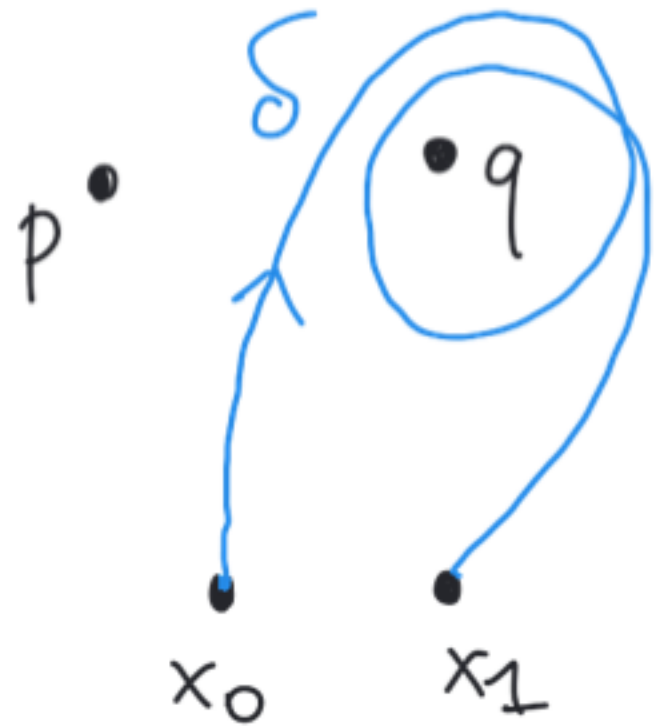
$$\pi_1(X, x_1) = \langle \alpha', \beta' \rangle$$

freie Gruppen

$$\gamma^{-1} \alpha \gamma = \alpha', \quad \gamma^{-1} \beta \gamma = \beta' \Rightarrow$$

$$\gamma_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

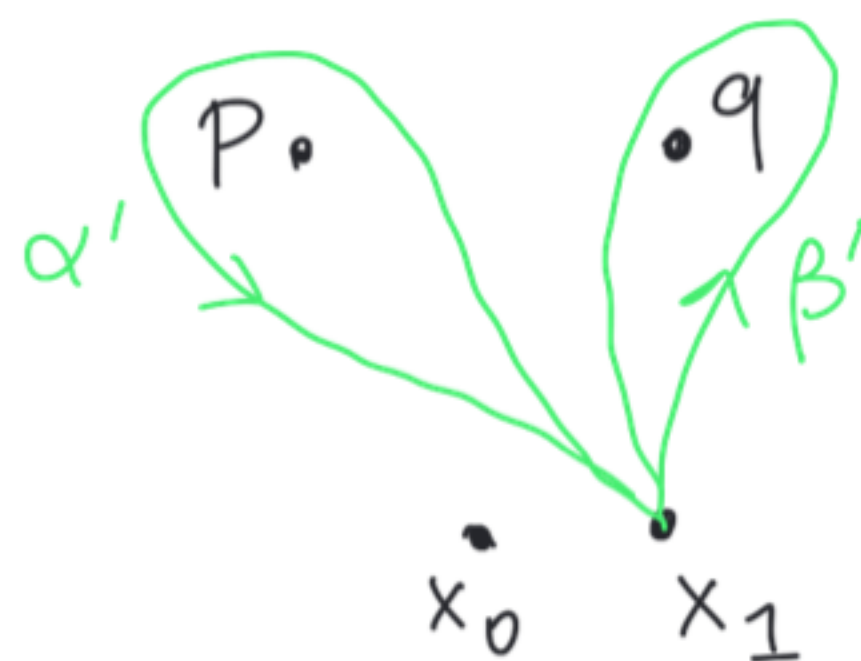
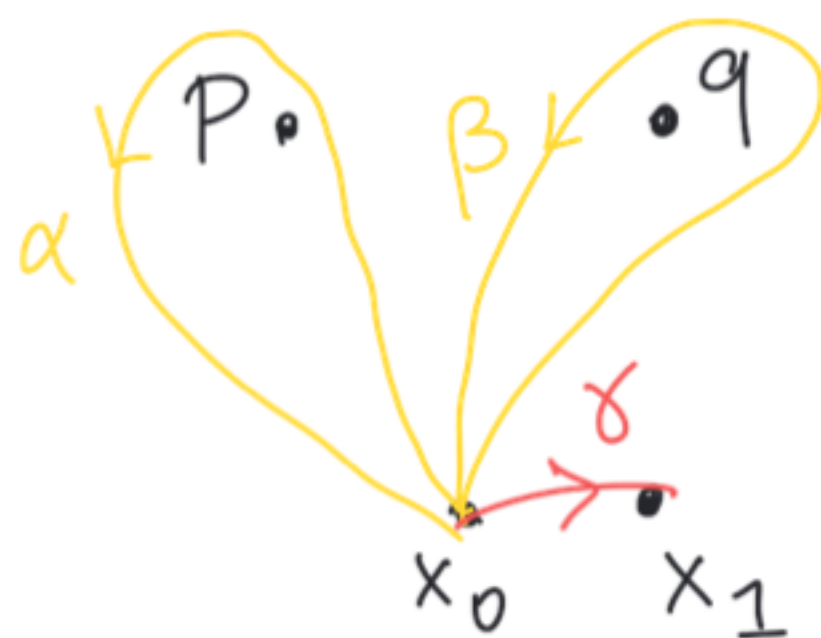
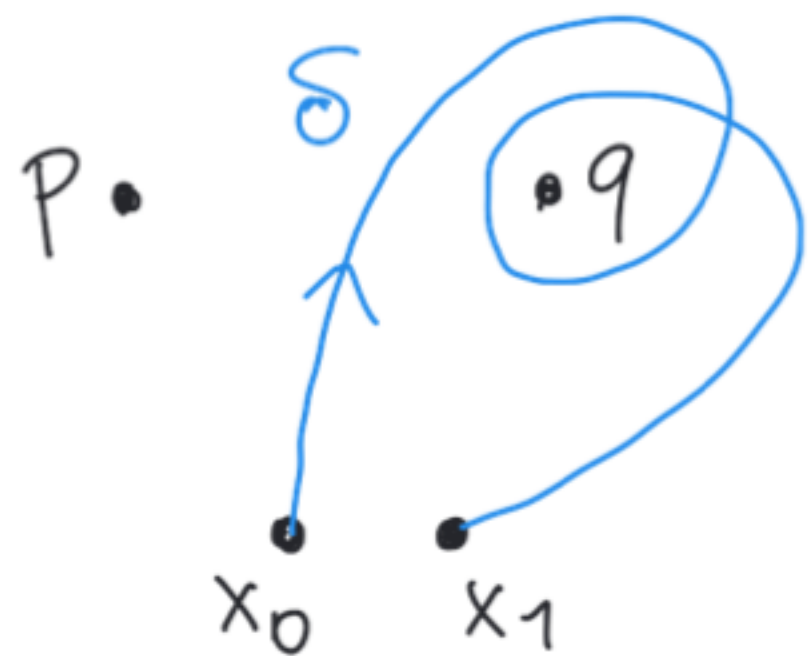
$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & \alpha' \\ \beta & \longmapsto & \beta' \end{array}$$



$$\delta^{-1} \alpha \delta = (\beta')^2 \alpha' (\beta')^{-2}$$

$$\delta_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$\alpha \longmapsto (\beta')^2 \alpha' (\beta')^{-2}$$



$$\gamma^{-1} \alpha \gamma = \alpha', \quad \gamma^{-1} \beta \gamma = \beta'$$

$$\delta \gamma^{-1} = \beta^{-2} \Rightarrow \delta = \beta^{-2} \gamma$$

$$\Rightarrow \delta^{-1} \beta \delta = \gamma^{-1} \beta^2 \beta \beta^{-2} \gamma = \gamma^{-1} \beta \gamma = \beta' \Rightarrow \delta_{\#} : \beta \mapsto \beta'$$

$$\delta_{\#} : \pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \pi_1(X, x_1) = \langle \alpha', \beta' \rangle$$

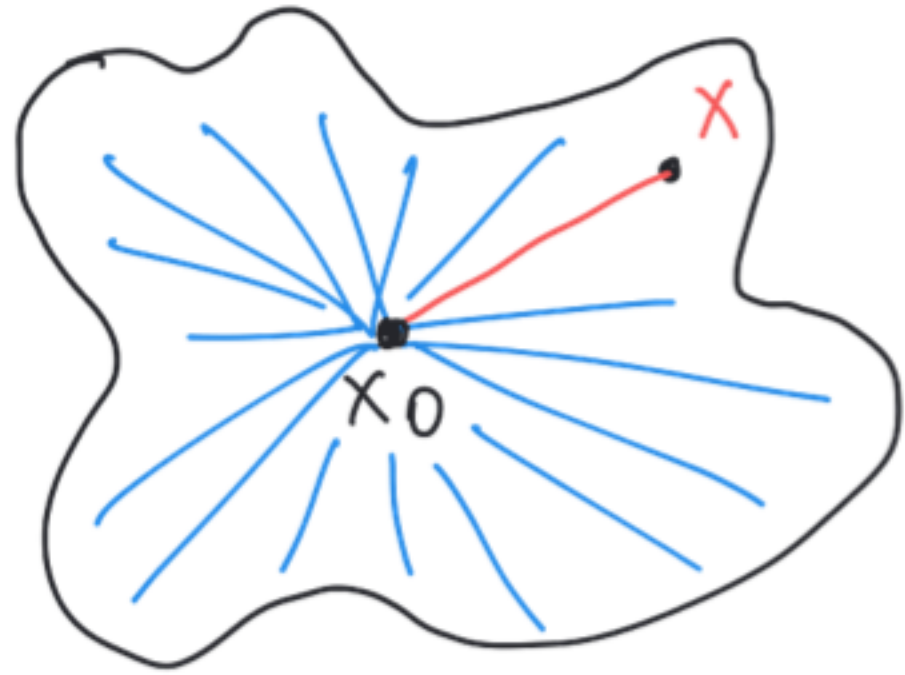
$$\begin{array}{lcl} \alpha & \longmapsto & (\beta')^2 \alpha' (\beta')^{-2} \\ \beta & \longmapsto & \beta' \end{array}$$

X wegzusammenhängend top. Raum, $x_0, x_1 \in X$
 $\Rightarrow \pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ sind isomorph. Trotzdem hängt der Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ vom Weg von x_0 nach x_1 ab. (man sehe das vorheriges Beispiel).

Def Ein top. Raum X heißt EINFACH ZUSAMMENHÄNGEND, wenn X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ die triviale Gruppe für ein/jedes $x_0 \in X$ ist.

Satz $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig $\Rightarrow X$ einfach zusammenhängend

Bws Sei $x_0 \in X$, sodass $\forall x \in X$ die Strecke zwischen x_0 und x .



Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Dann

$$F: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$(t, s) \longmapsto (1-s)\alpha(t) + sx_0$$

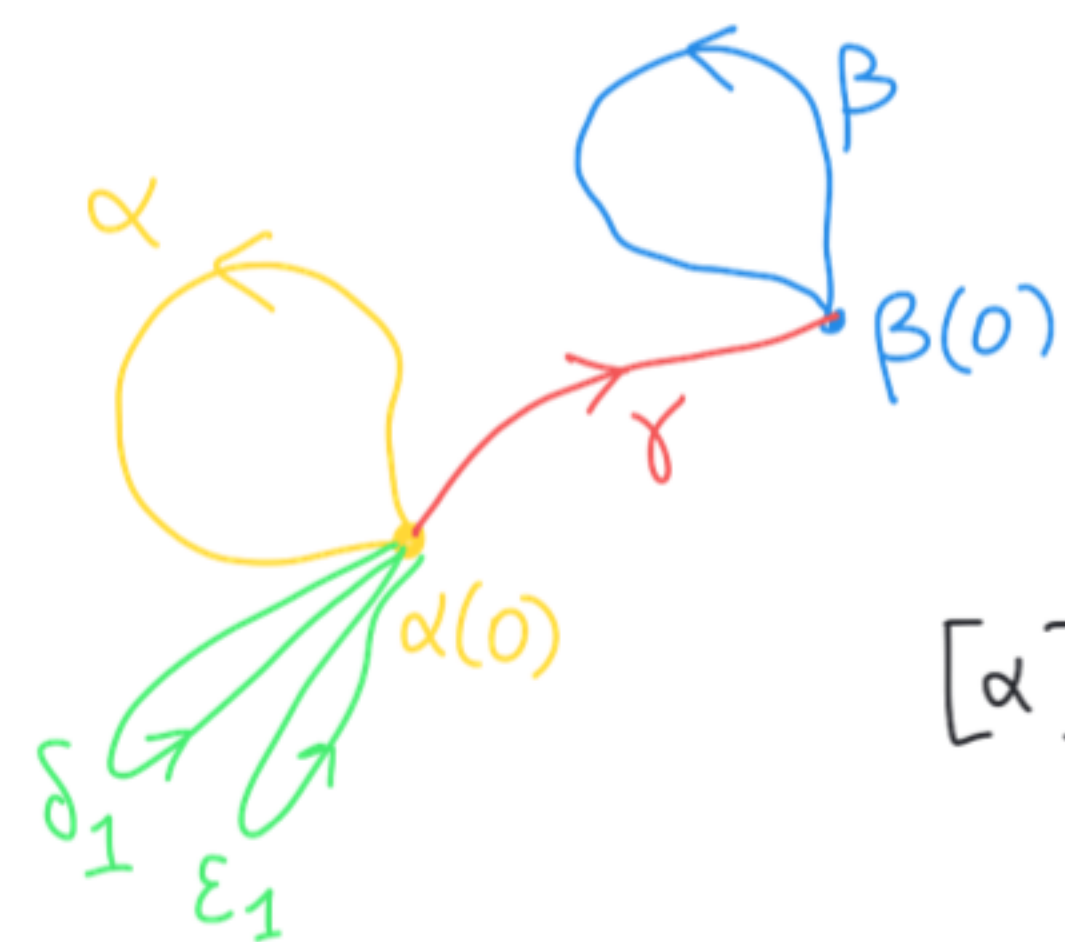
ist eine Weghomotopie zwischen α und dem konstanten Weg c_{x_0} .

$$\Rightarrow [\alpha] = [c_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0).$$

$$\Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}. \quad \square$$

Kor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convex $\Rightarrow X$ einfach zusammenhängend.

Def Seien $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ und $\beta: [0,1] \rightarrow X$ zwei Schleifen in einem topologischen Raum X . (d.h. $\alpha(0)=\alpha(1)$, $\beta(0)=\beta(1)$). α und β heißen HOMOLOG, wenn es einen Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ von $\alpha(0)$ nach $\beta(0)$ und Schleifen $\delta_1, \varepsilon_1, \dots, \delta_k, \varepsilon_k$ in X mit

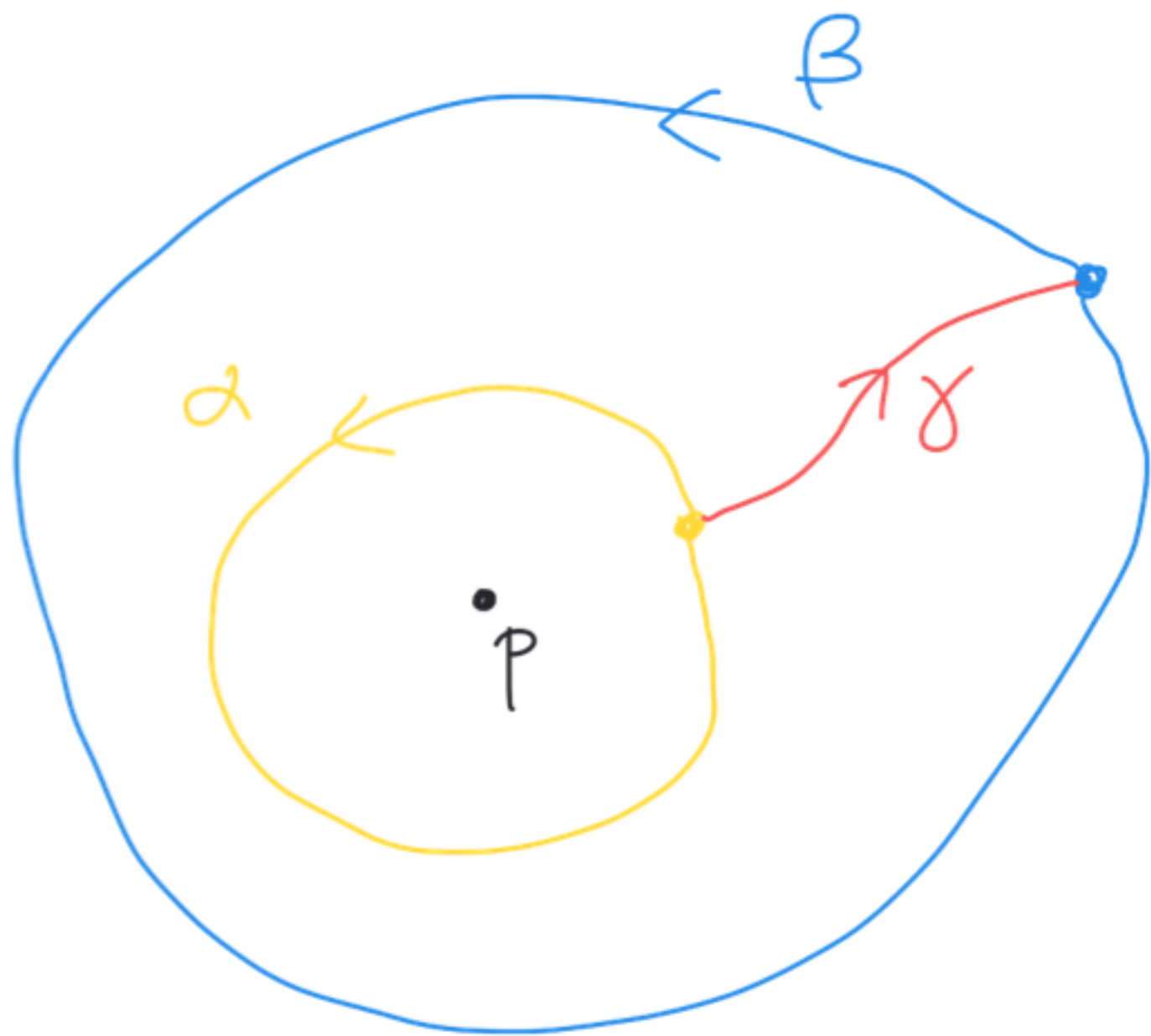


Basispunkt $\alpha(0)$ gibt, sodass α und $\gamma * \beta * \iota(\gamma) * \delta_1 * \varepsilon_1 * \iota(\delta_1) * \iota(\varepsilon_1) * \dots * \delta_k * \varepsilon_k * \iota(\delta_k) * \iota(\varepsilon_k)$ Weghomotop sind, d.h.: in $\pi_1(X, \alpha(0))$

$$[\alpha] = [\gamma * \beta * \iota(\gamma)] [\delta_1] [\varepsilon_1] [\delta_1]^{-1} [\varepsilon_k] \dots [\delta_k] [\varepsilon_k] [\delta_k]^{-1} [\varepsilon_k]^{-1}.$$

Bem α, β weghomotope Schleifen $\Rightarrow \alpha, \beta$ homolog.

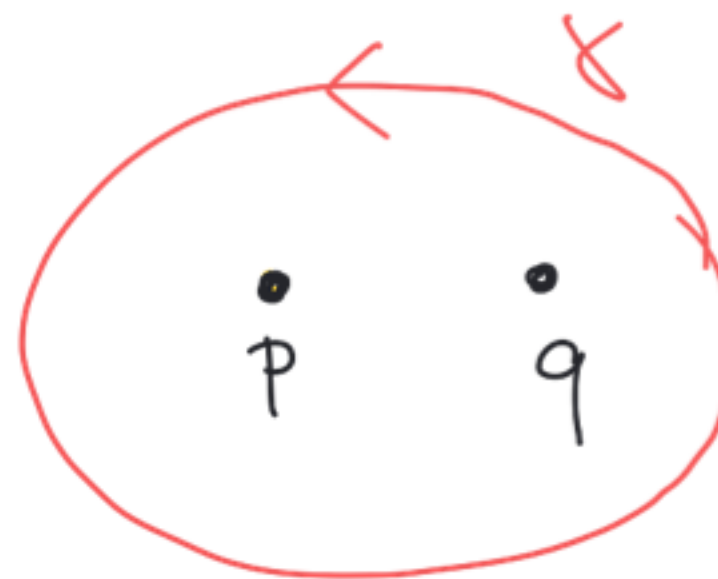
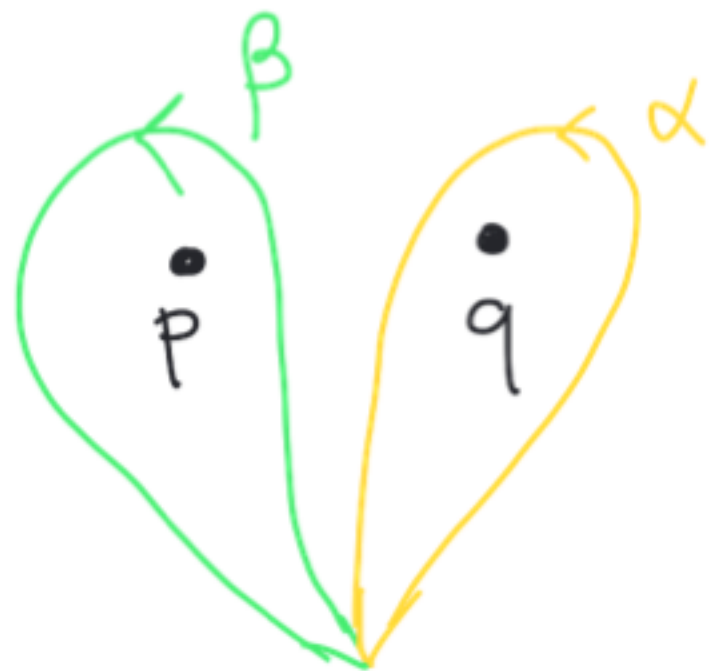
Beispiel $p \in \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C} \setminus \{p\}$



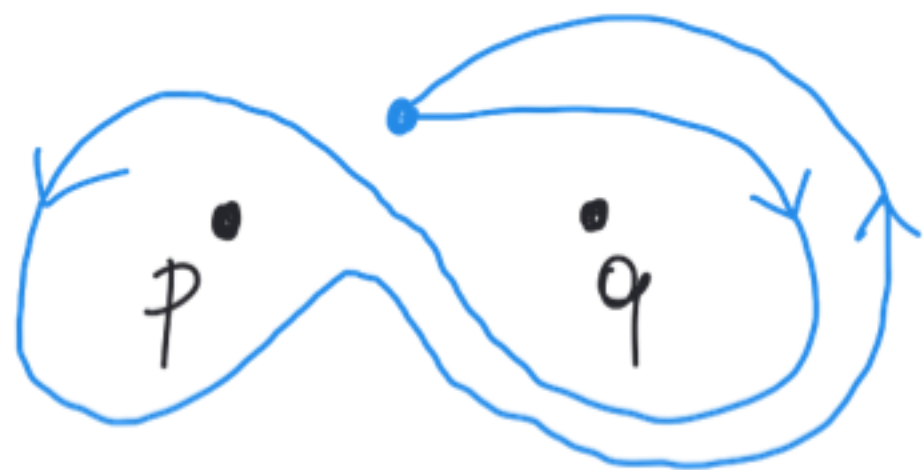
$$\alpha \simeq \gamma \beta \gamma^{-1}$$

$\Rightarrow \alpha, \beta$ sind homolog

Beispiel $p, q \in \mathbb{C}, p \neq q, X = \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$.



γ ist
homolog
zu
 $\alpha + \beta$



$\alpha^{-1}\beta\alpha$, β sind homolog

Lemma $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung zwischen top. Räumen. Dann:

- 1) $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b), \alpha \simeq \beta \Rightarrow f \circ \alpha \simeq f \circ \beta \in \Omega(Y, f(a), f(b))$
2) $\alpha \in \Omega(X, a, b), \beta \in \Omega(X, b, c) \Rightarrow f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$
 $f(\iota(\alpha)) = \iota(f \circ \alpha)$

Bws 1) Hausaufgabe 3.5.d. 2) Einfach. $\square$

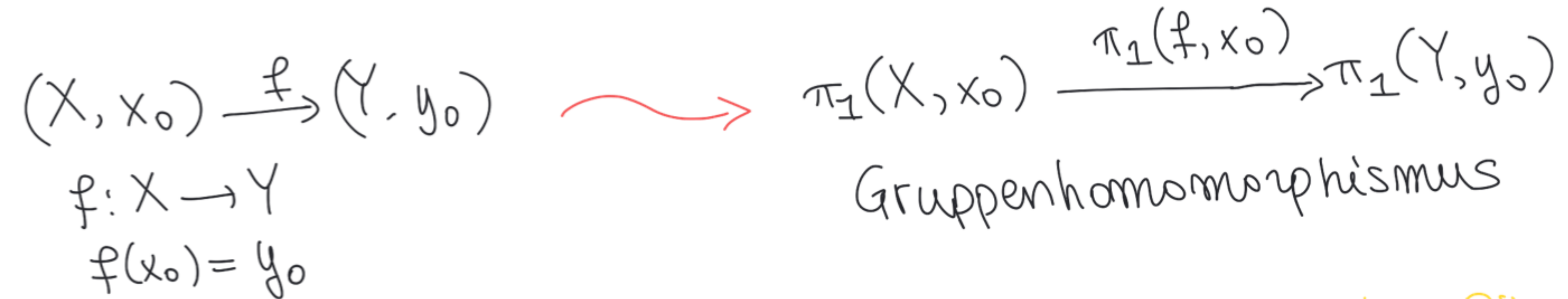
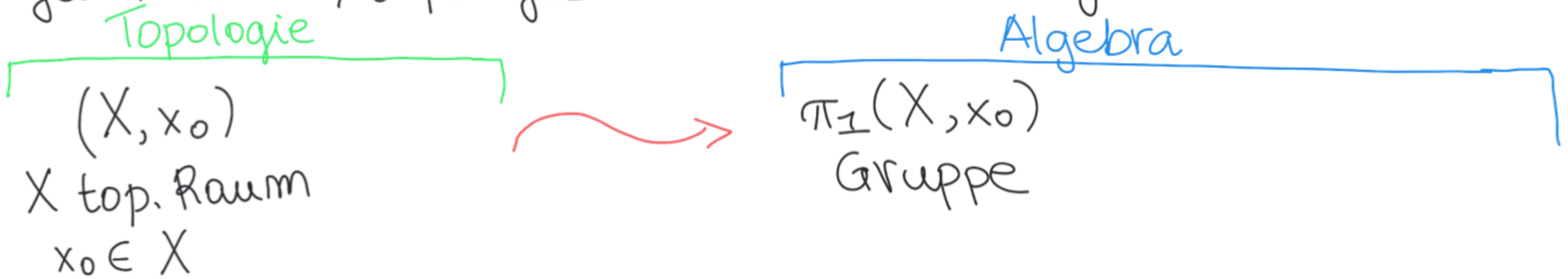
Def $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung zwischen zwei top. Räumen. $x_0 \in X$.
Wir definieren

$$\pi_1(f, x_0): \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

Wohldefiniert: 1)

Gruppenhomomorphismus: 2).

Das ist die Idee von der algebraischen Topologie: man verwandelt geometrische/topologische Probleme in algebraische Probleme.



Funktor von (Top_*) , d.h. die Kategorie von top. Räumen mit Basispunkt, nach der Kategorie von Gruppen.

Beispiel Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest.

$$P_n: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z \longmapsto z^n \quad P_n(1) = 1$$

$$\Phi: \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \\ k \longmapsto \left[[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^* \right. \\ \left. t \longmapsto e^{2\pi i k t} \right]$$

Gruppenisomorphismus

$$\Phi(1): [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ t \longmapsto e^{2\pi i t}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow{\pi_1(P_n, 1)} & \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \pi_1(P_n, 1)(\Phi(1)) &= [P_n \circ \Phi(1)] \\ P_n \circ \Phi(1): [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}^*, t \longmapsto P_n(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i n t} \\ \Rightarrow P_n \circ \Phi(1) &= \underbrace{\Phi(1) * \dots * \Phi(1)}_{n \text{ mal}} \end{aligned}$$

Satz X, Y top. Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$

$$\text{pr}_X: X \times Y \longrightarrow X$$

$$\text{pr}_Y: X \times Y \longrightarrow Y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto ([\text{pr}_X \circ \alpha], [\text{pr}_Y \circ \alpha]) \end{aligned}$$

ist eine Gruppensomorphismus.

Wir unterlassen den Beweis.

Satz X top. Raum, $A \subseteq X$, $i: A \hookrightarrow X$ Inklusionsabbildung, $a_0 \in A$.
 $\pi_1(i, a_0): \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$. Dann:

- 1) A Retrakt von $X \Rightarrow \pi_1(i, a_0)$ injektiv
- 2) A Deformationsretrakt von $X \Rightarrow \pi_1(i, a_0)$ bijektiv

BWS 1) $\pi: X \rightarrow A$, $\pi \circ i = \text{id}_A$. $\text{id}_{\pi_1(A, a_0)} = \pi_1(\text{id}_A, a_0) =$
 $= \pi_1(\pi \circ i, a_0) = \pi_1(\pi, a_0) \circ \pi_1(i, a_0)$

2) $R: X \times [0, 1] \rightarrow X$, $R(\cdot, 1) = \text{id}_X$, $\forall x \in X$ $R(x, 0) \in A$,
 $\forall s \in [0, 1], \forall a \in A$, $R(a, s) = a$. Sei $\pi = R(\cdot, 1): X \rightarrow A$.
Sei $\beta \in \Omega(X, a_0, a_0)$. Betrachte $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$
 $(t, s) \mapsto R(\beta(t), s)$

F ist eine Weghomotopie zwischen β und $\pi \circ \beta$. Und $\pi \circ \beta$ ist eine Schleife in A .

$\Rightarrow \pi_1(i, a_0): \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ ist surjektiv. $\square$

Satz X, Y top. Räume. $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$ stetig.

$$f = F(\cdot, 0): X \rightarrow Y \quad g = F(\cdot, 1): X \rightarrow Y$$

$$x_0 \in X. \quad \gamma = F(x_0, \cdot): [0,1] \rightarrow Y$$

Dann

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x_0) & \\ \pi_1(f, x_0) \swarrow & & \searrow \pi_1(g, x_0) \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\gamma_{\#}} & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

kommutiert.

Wir unterlassen den Beweis. Die interessierte Studierende können [Manetti, Proposition 11.19] sehen.

Satz X, Y top. Räume, $f: X \rightarrow Y$ Homotopieäquivalenz
 $x_0 \in X \Rightarrow \pi_1(f, x_0): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ ist eine
Gruppenisomorphismus

Kor X, Y wegzusammenhängende topologische Räume.

X und Y homotopieäquivalent. Dann:

X ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow Y$ ist einfach zusammenhängend.

Kor X top. Raum.

X zusammenziehbar $\Rightarrow X$ einfach zusammenhängend.

Bws X ist homotopieäquivalent zum Punkt. $\square$

Bemerkung einfach zusammenhängend $\nRightarrow$ zusammenziehbar
Trotzdem haben wir in diesem Kurse keine Instrumente,
um das zu beweisen. S^2 ist einfach zusammenhängend und
nicht zusammenziehbar.

Beispiele 1) $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Auch $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, denn S^1 ist ein Deformationsretrakt von $\mathbb{C}^*$.

2) $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ freie Gruppe mit 2 Erzeugern

3) Wenn $n \geq 2$ gilt, ist $\pi_1(S^n)$ die triviale Gruppe.