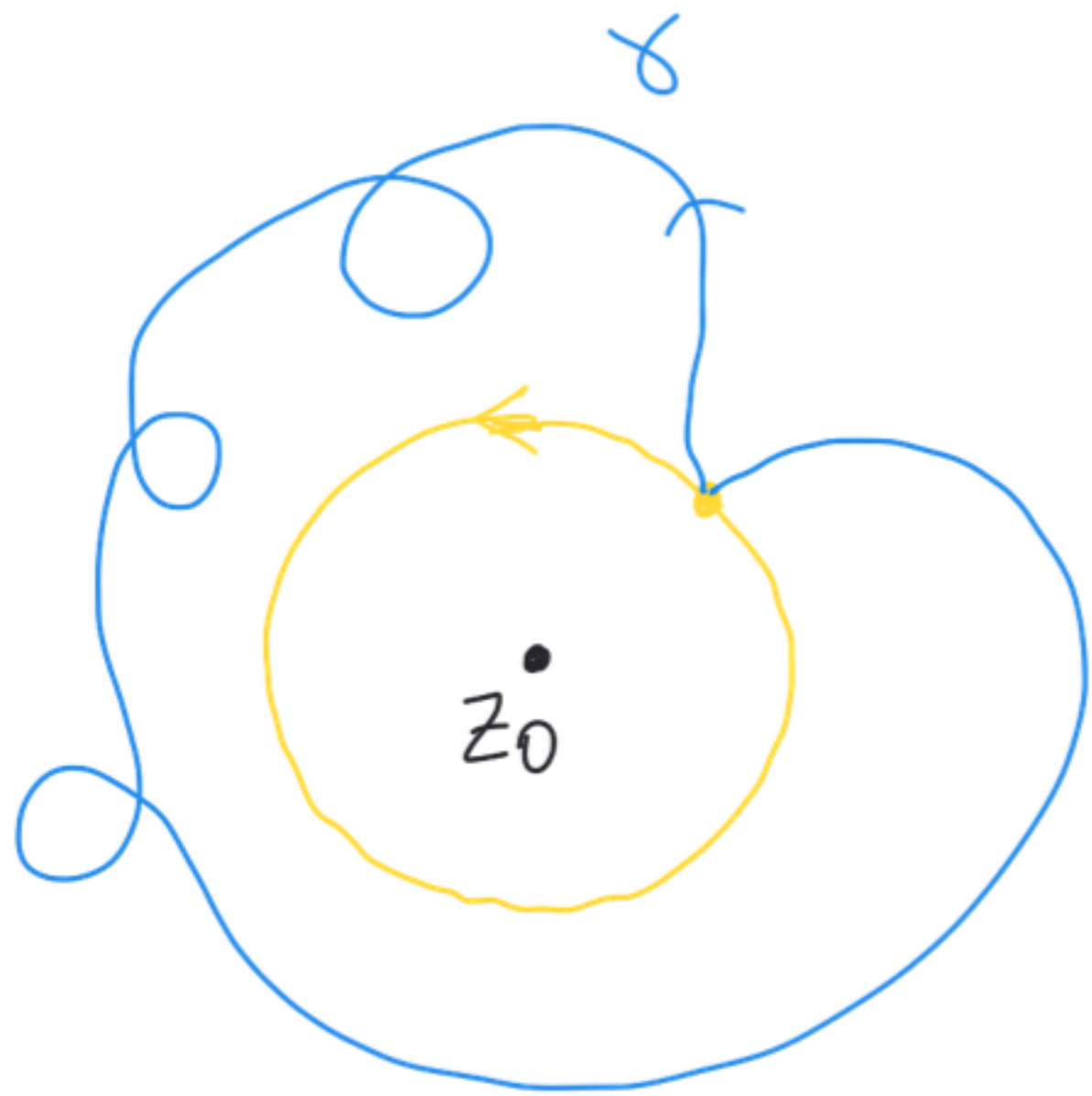


Def $z_0 \in \mathbb{C}$, $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ Schleife.

Die UMLAUFGZAHLE von γ in Bezug auf z_0 ist die Anzahl der Umrundungen entgegen der Uhrzeigerrichtung um z_0 , wenn man dem Verlauf von γ folgt.



Genauer:

Sei $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$$t \mapsto z_0 + (\gamma(0) - z_0) e^{2\pi i t}$$

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \gamma(0)) \simeq \mathbb{Z} \text{ mit}$$

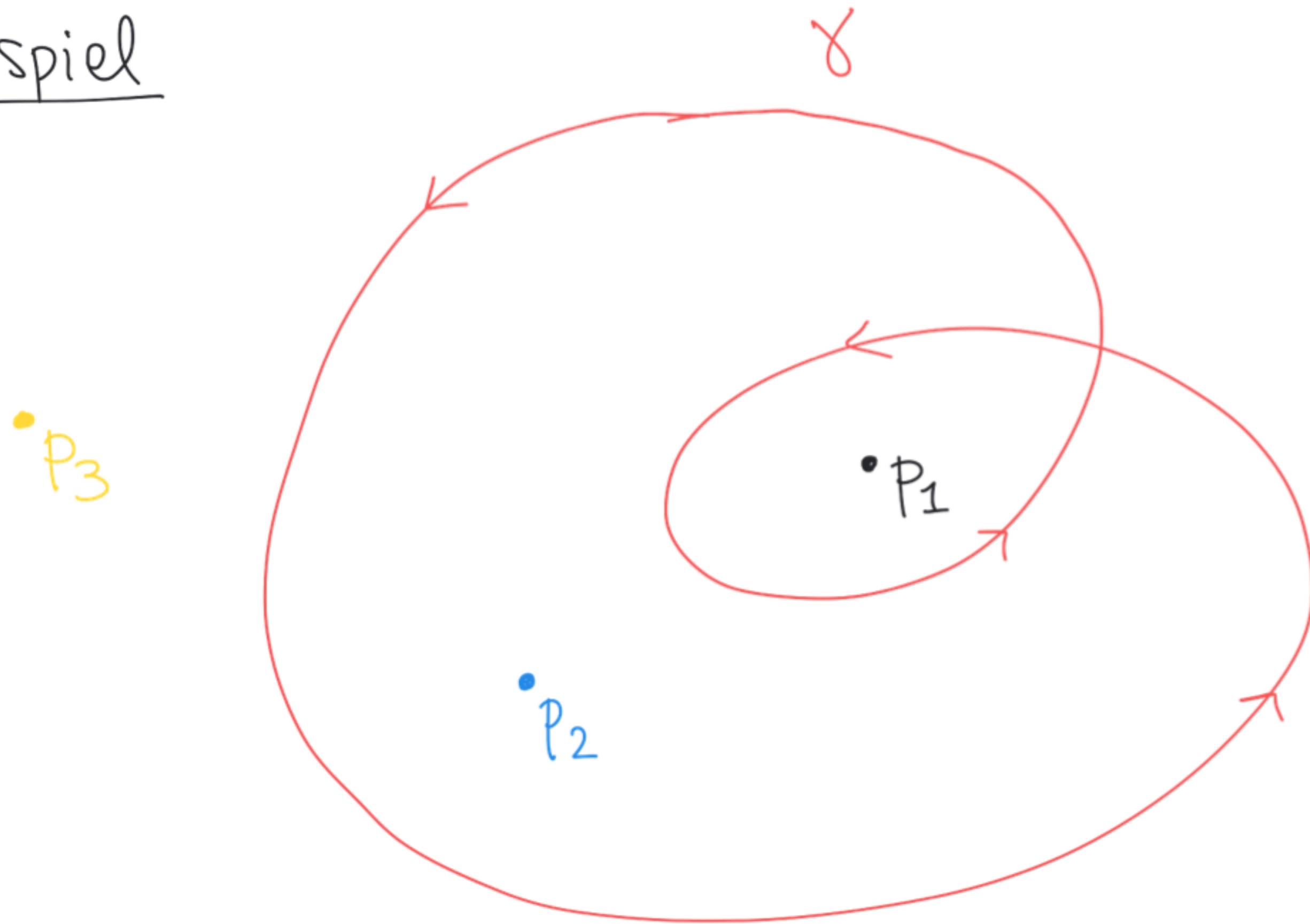
Erzeuger α

$$\Rightarrow \exists! k \in \mathbb{Z}: [\gamma] = [\alpha]^k = \underbrace{[\alpha * \dots * \alpha]}_k \text{ in } \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \gamma(0)).$$

k ist die Umlaufzahl (Winding number) von γ relativ zu z_0 :

$$W(\gamma, z_0) := k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel

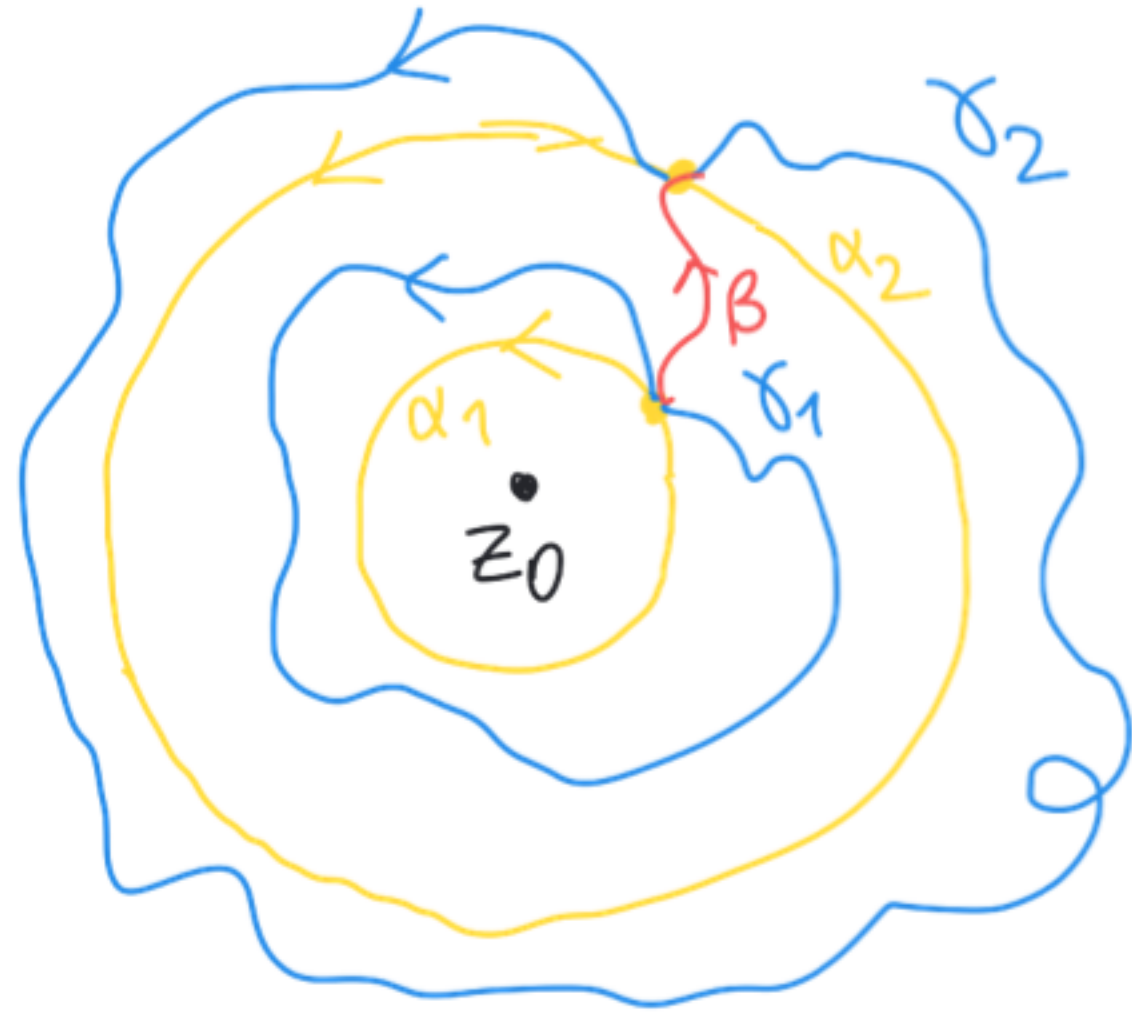


$$W(\gamma, p_3) = 0$$

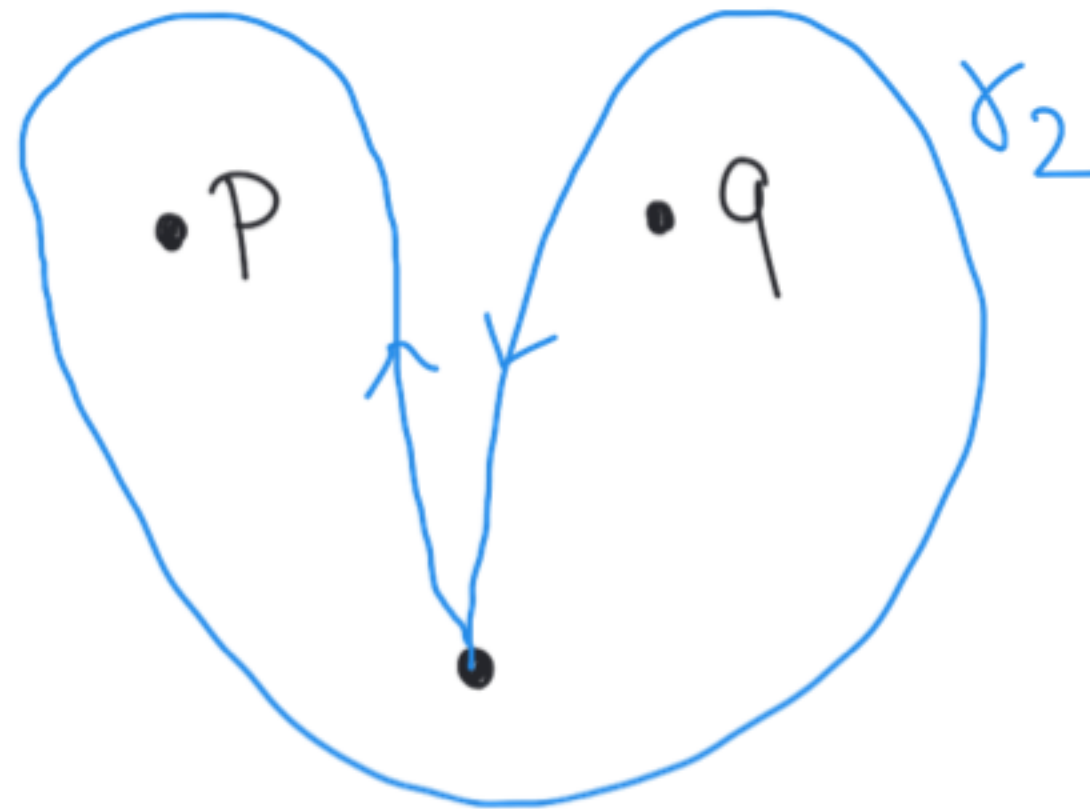
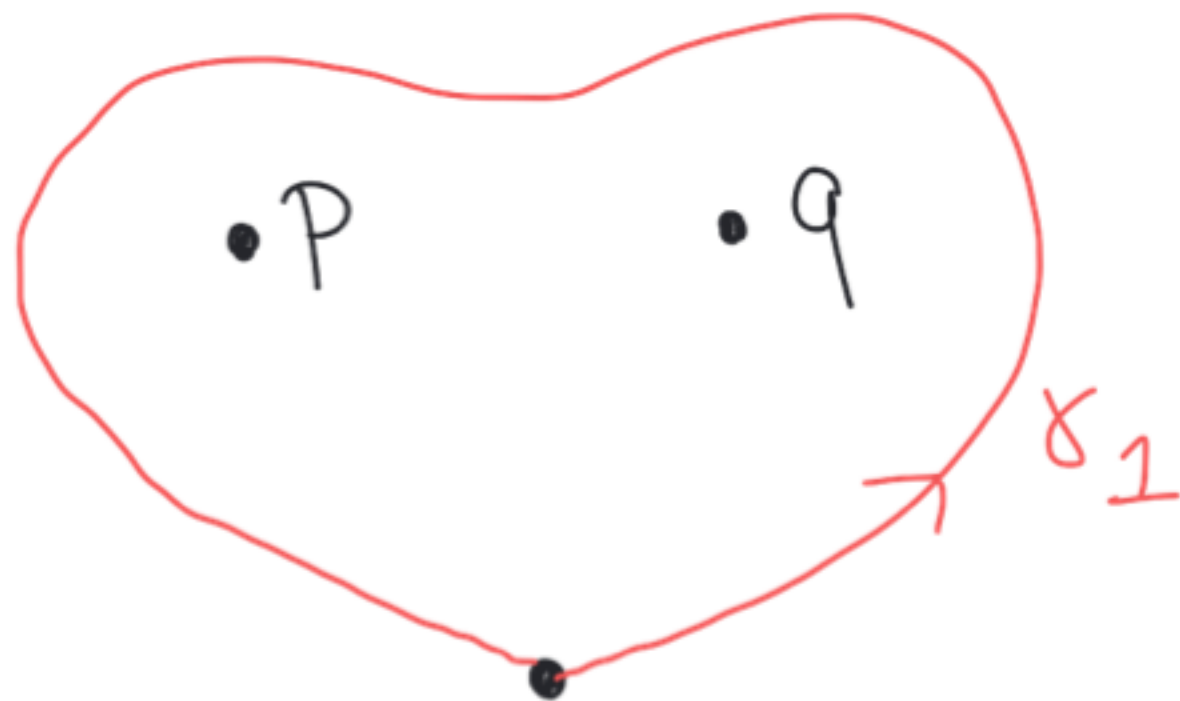
$$W(\gamma, p_2) = 1$$

$$W(\gamma, p_1) = 2$$

Satz $z_0 \in \mathbb{C}$. γ_1, γ_2 Schleifen in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dann:
 γ_1 und γ_2 sind homolog in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \iff W(\gamma_1, z_0) = W(\gamma_2, z_0)$



Beispiel



γ_1 und γ_2 sind nicht weghomotop in $\mathbb{C} \setminus \{p, q\}$

γ_1 und γ_2 sind homolog in $\mathbb{C} \setminus \{p, q\}$

$$W(\gamma_j, p) = W(\gamma_j, q) = 1$$

Satz $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ verschieden
 α, β Schleifen in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$.

Dann:

α, β homolog in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \iff \forall j=1, \dots, k$
 $W(\alpha, z_j) = W(\beta, z_j)$

Hausaufgabe

