

1-Differentialformen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (Pfaßsche Formen)

Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Sei $dx_1, \dots, dx_n$ die zugehörige duale Basis.

$$(\mathbb{R}^n)^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

$$dx_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_i$$

Def Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine 1-FORM auf U ist eine stetige Abbildung $\omega: U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^\vee$.

Eine 1-Form lässt sich als $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ darstellen, wobei $\omega_1, \dots, \omega_n$ stetige Abbildungen $U \longrightarrow \mathbb{R}$ sind. Diese Darstellung ist eindeutig. ω heißt C^k , genau wenn $\omega_1, \dots, \omega_n$ C^k sind.

Beispiel 1) $U = \mathbb{R}$, $\omega = (x^3 + 1) dx$

2) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$

Def $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 Abbildung. Das (TOTALE) DIFFERENTIAL von F ist die 1-Form

$$dF := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \text{ auf } U.$$

Beispiel 1) $U = \mathbb{R}$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \Rightarrow dF = 3x^2 dx$.

2) $U = \mathbb{R}^2$, $F: U \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3 + y \Rightarrow dF = 3x^2 dx + dy$

Def Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine 1-Form ω auf U heißt:

- EXAKT, wenn es eine C^1 Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $\omega = dF$ gilt. In diesem Fall ist F eine STAMMFUNKTION von ω .
- LOKAL EXAKT, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von U gibt, sodass für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Einschränkung $\omega|_{U_\lambda}$ eine exakte 1-Form auf U_λ ist.
- GESCHLOSSEN, wenn $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ C^1 ist und für alle $1 \leq i < j \leq n$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \quad \text{auf } U.$$

Bem exakt $\Rightarrow$ lokal exakt.

Bem $U \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$\omega = f(x) dx$ auf U .

Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f nach Analysis I,
d.h. $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ mit $x_0 \in U$.

Dann F ist eine Stammfunktion von ω nach der vorherigen
Definition, denn $F'(x) = f(x) \Rightarrow dF = f(x) dx = \omega$.

Deshalb ω ist exakt.

Bem $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$



$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

$$F_1: U_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_1(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

F_1 ist eine Stammfunktion von $\omega|_{U_1}$

Satz $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. ω 1-Form auf U .
 $\omega \in C^1$ und lokal exakt $\Rightarrow \omega$ geschlossen.

BWS $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ mit $\omega_i: U \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$.

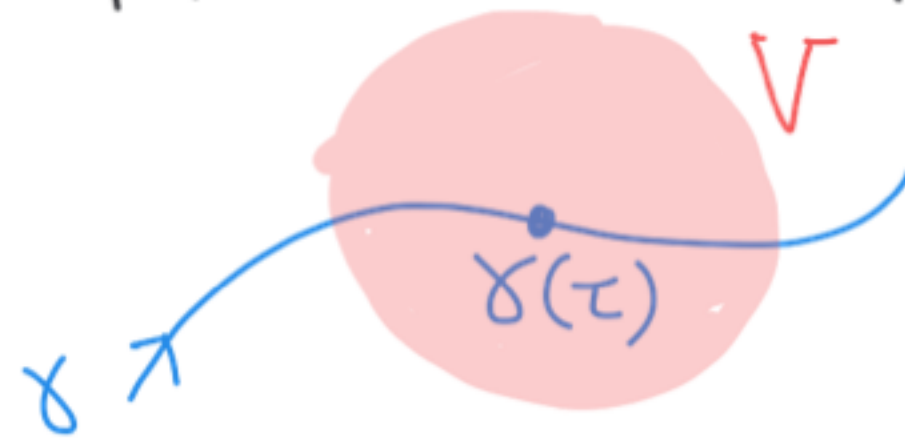
$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offen Überdeckung, $F_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion
von $\omega|_{U_\lambda}$ auf U_λ , d.h. F_λ ist C^1 und $\omega_i|_{U_\lambda} = \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}$.

$$\begin{array}{ccc} \omega_i \in C^1 \Rightarrow F_\lambda \in C^2 & \Rightarrow & \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_i} \\ & \parallel & \parallel \\ & \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} & \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \text{ auf } U_\lambda \end{array}$$

□

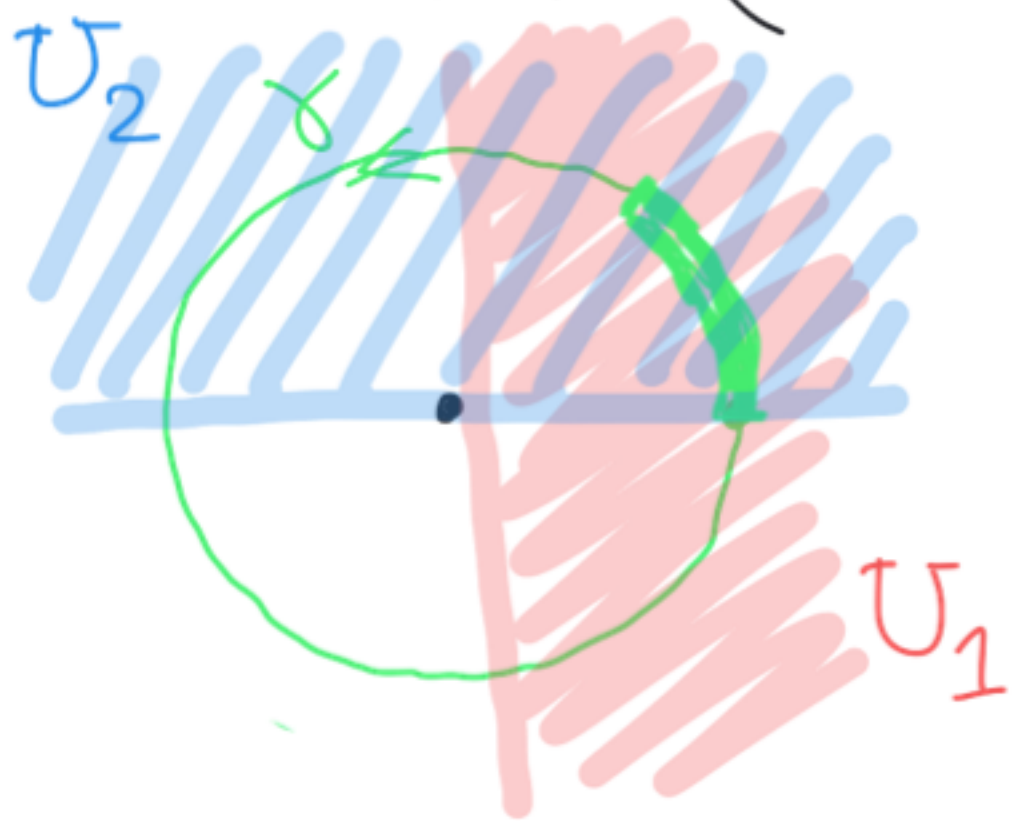
Def Sei ω eine lokal exakte 1-Form auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Weg. Eine STAMMFUNKTION von ω ENTLANG γ ist eine stetige Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sodass:

$\forall \tau \in [a, b]$, $\exists$ offene Umgebung V von $\gamma(\tau)$ in U und eine Stammfunktion $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ von $\omega|_V$: $F \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(V)} = f|_{\gamma^{-1}(V)}$,
d.h. $\forall t \in \gamma^{-1}(V)$, $F(\gamma(t)) = f(t)$.



Bem Wenn ω exakt ist und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω ist, dann ist $f = F \circ \gamma$ eine Stammfunktion von ω entlang γ .

Beispiel $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ auf U
 $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ Was ist eine Stammfunktion von ω entlang γ ?
 $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$



First we define f over $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\omega|_{U_1}$ exact, $F_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \arctan(\frac{y}{x})$

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad f(t) = F_1(\gamma(t)) = \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t.$$

$U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ $F_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ primitive of $\omega|_{U_2}$
 up to adding a constant we can assume $F_2(\gamma(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{\pi}{4})$
 We extend f to $[0, \frac{3}{4}\pi]$: $[0, \frac{\pi}{4}]$ already constructed
 $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi] \quad f(t) := F_2(\gamma(t))$

Satz (Lebesguezahl) (Y, d) kompakter metrischer Raum.

X top. Raum, $f: Y \rightarrow X$ stetig

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von X
 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall y \in Y, \exists \lambda \in \Lambda : f(B_\delta(y)) \subseteq U_\lambda.$

Wir lassen den Beweis aus.

Kor X top. Raum, $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ Weg.

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von X .

$\Rightarrow$ es gibt $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = b$, sodass

$\forall i = 0, \dots, r, \exists \lambda \in \Lambda : \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_\lambda$



Satz $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω lokal exakte 1-Form auf U

$\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Weg.

$\Rightarrow$ Es gibt eine Stammfunktion von ω entlang γ . Diese ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Bws $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ offene Überdeckung von U
 $\omega|_{U_\lambda}$ ist exakt mit $F_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion.

Lebesguezahl $\Rightarrow \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = b$

$\forall i = 0, \dots, r \quad \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{\lambda_i}$

We construct $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ first on $[t_0, t_1]$, then extend to $[t_0, t_2]$, $[t_0, t_3]$, $\dots$, $[t_0, t_{r+1}] = [a, b]$.

$t_0 \leq t \leq t_1 \Rightarrow f(t) := F_{\lambda_0}(\gamma(t))$.

What happens at t_1 ? $f(t_1)$ $F_{\lambda_1}(\gamma(t_1))$ might be

be different. So with an additive constant we change F_{λ_1} in order to have $f(t_1) = F_{\lambda_1}(\gamma(t_1))$. Then we define

$$f: [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} \text{Old definition} & t_0 \leq t \leq t_1 \\ F_{\lambda_1}(\gamma(t)) & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

... go on construct the function $f: [t_0, t_3] \rightarrow \mathbb{R} \dots$
 after finitely many steps $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Eindeutigkeit: seien f_1, f_2 zwei Stammfunktionen von ω entlang γ .

$t \in [a, b] \Rightarrow \exists V$ ^{connected} nbd of $\gamma(\tau)$ in U F_1 primitive of $\omega|_V$
 F_2 " " "

$f_j(t) = F_j(\gamma(t))$ for $|t - \tau| < \varepsilon$. $F_1 - F_2$ constant on V

$f_1 - f_2$ is constant on $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$.

$\Rightarrow f_1 - f_2$ is locally constant. $\} \Rightarrow f_1 - f_2$ constant.
[a,b] connected

□