

Def $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω 1-Form auf U , $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Weg.

(1) Wenn γ teilweise C^1 ist, dann

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^V} \underbrace{(\dot{\gamma}(t))}_{\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n} dt = \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt$$

wobei

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$$

$$\forall t \in [a, b], \omega(\gamma(t)) \in (\mathbb{R}^n)^V$$

(2) Wenn ω lokal exakt ist, dann

$$\int_{\gamma} \omega := f(b) - f(a)$$

wobei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω entlang γ .

Die reelle $\int_{\gamma} \omega$ heißt das INTEGRAL von ω entlang γ .

Satz Def 1 und Def 2 sind kompatibel.

Bws ω ist lokal exakt und γ teilweise C^1 .

Lebesgue Zahl $\Rightarrow \exists a=t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1}=b$ und
 $U_0, \dots, U_r \subseteq U$ offene, s.d. $\forall i=0, \dots, r \quad \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow U_i$
ist C^1 und $\omega|_{U_i}$ ist exakt mit Stammfunktion $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$.
Wenn man eine Konstante addiert, $F_i(\gamma(t_{i+1})) = F_{i+1}(\gamma(t_{i+1})) \quad \forall i=0, \dots, r$

$$\begin{aligned} f: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = F_i(\gamma(t)) \text{ für } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ f &\text{ ist eine Stammfunktion von } \omega \text{ entlang } \gamma. \\ \int_a^b \sum_{j=1}^n \omega_j(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_j(t) dt &= \sum_{i=0}^r \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_j(\gamma(t)) \dot{\gamma}_j(t) dt = \sum_{i=0}^r \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F_i \circ \gamma)'(t) dt = \sum_{i=0}^r ((F_i \circ \gamma)(t_{i+1}) - (F_i \circ \gamma)(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^r (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(b) - f(a). \quad \square \end{aligned}$$

kettenregel $\omega|_{U_i} = dF_i$

Beispiel $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ auf U .

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow U$$
$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right] dt = 2\pi$$

ω ist nicht exakt: wenn ω eine Stammfunktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen würde, dann wäre $F \circ \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω entlang γ , daher

$$\int_{\gamma} \omega = (F \circ \gamma)(2\pi) - (F \circ \gamma)(0) = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0$$

$$\uparrow$$
$$\gamma(2\pi) = \gamma(0)$$

Satz $\int_{\gamma} \omega$ hängt nicht von der Parametrisierung von γ ab.

Bws $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω 1-Form auf U , $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Weg.
 $\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ Homöomorphismus mit $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$.

① γ und φ teilweise C^1 .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} \omega &= \int_{a_1}^{b_1} \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(\varphi(s))) \cdot (\gamma_i \circ \varphi)'(s) ds = \int_{a_1}^{b_1} \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(\varphi(s))) \cdot \dot{\gamma}_i(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt = \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

② ω lokal exakt. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω entlang γ . Deshalb ist $f \circ \varphi: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω entlang $\gamma \circ \varphi$.

$$\Rightarrow \int_{\gamma \circ \varphi} \omega = (f \circ \varphi)(a_1) - (f \circ \varphi)(b_1) = f(a) - f(b) = - \int_{\gamma} \omega. \quad \square$$

Physik $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Sei $\vec{F} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld.

- ω ist exakt $\Leftrightarrow \vec{F}$ ist konservativ. Nämlich, wenn $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 Abbildung ist, dann V ist eine Stammfunktion von ω (d.h. $dV = \omega$) $\Leftrightarrow V$ ist ein Potential von $\vec{F}$, d.h. $\nabla V = \vec{F}$.

- Sei ω (und $\vec{F}$) C^1 .

$$\nabla \times \vec{F} := \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) : U \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Dann ω ist geschlossen $\Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$.

- $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ teilweise C^1 , $\vec{F}$ Kraftsfeld $\Rightarrow$
 $\int_{\gamma} \omega = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$ ist die Arbeit, die die Kraft $\vec{F}$ entlang γ wirkt.
↑ Skalarprodukt

Satz Das Integral $\int_{\gamma} \omega$ ist bilinear in γ und ω .

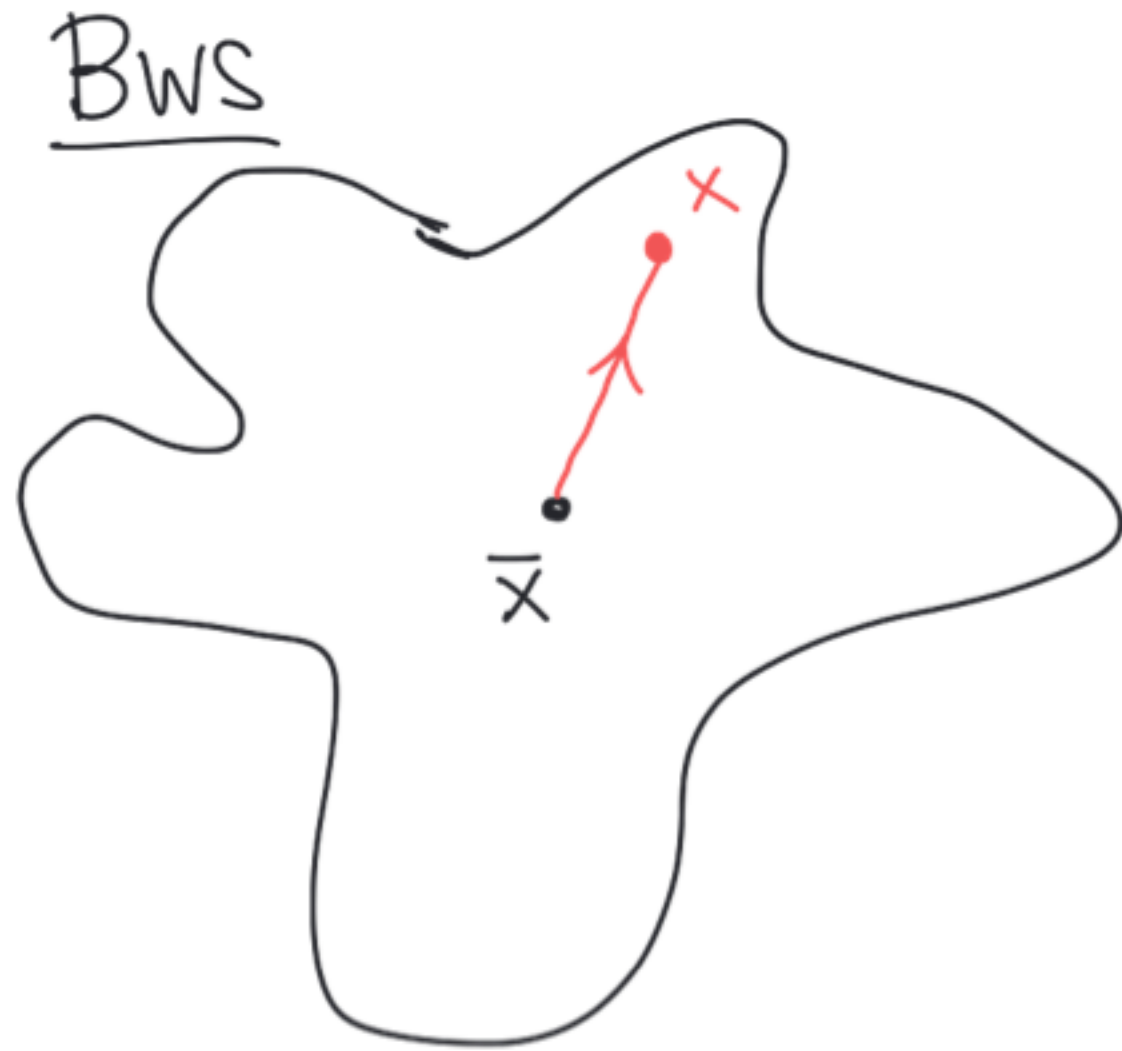
$$\bullet \int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$\bullet \int_{\iota(\gamma)} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

$$\bullet \int_{\gamma} (\omega + \eta) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} \eta$$

$$\bullet \int_{\gamma} \lambda \omega = \lambda \cdot \int_{\gamma} \omega \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Satz $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sternförmig. ω 1-Form auf U .
 ω geschlossen $\Rightarrow \omega$ exakt.



Sei $\bar{x} \in U$, sodass $\forall x \in U$ die Strecke zwischen $\bar{x}$ und x in U ist.

$$\gamma_x: [0, 1] \rightarrow U$$
$$t \mapsto (1-t)\bar{x} + tx$$

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot (x_i - \bar{x}_i) dt$$

Wir wollen beweisen, dass F eine Stammfunktion von ω ist.

Sei $1 \leq k \leq n$ fest. Sei $x \in U$ fest.

$$\text{Sei } G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \omega_k(\bar{x} + t(x - \bar{x}))$$

$$G'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} (\bar{x} + t(x - \bar{x})) (x_i - \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} (\bar{x} + t(x - \bar{x})) (x_i - \bar{x}_i)$$

ω geschlossen 

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\omega_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) (x_i - \bar{x}_i) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} [\omega_i(\bar{x} + t(x - \bar{x}))] \cdot (x_i - \bar{x}_i) + \omega_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot \delta_{ik} \right\} dt = \\ &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} (\bar{x} + t(x - \bar{x})) \cdot t \cdot (x_i - \bar{x}_i) \right) + \omega_k(\bar{x} + t(x - \bar{x})) \right] dt \\ &= \int_0^1 [G'(t) \cdot t + G(t)] dt = \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} (G(t) \cdot t) \right] dt = G(1) \cdot 1 - G(0) \cdot 0 \\ &= G(1) = \omega_k(x). \quad \square \end{aligned}$$

Satz $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω 1-Form auf U . Dann:
 $\omega \in C^1$ und lokal exakt $\iff \omega$ geschlossen

Bws $\Rightarrow$) schon beweis.

$\Leftarrow$) ω ist C^1 : ok.

$x_0 \in U$ beliebig. U offen in $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$.

ω geschlossen $\Rightarrow \omega|_{B_\varepsilon(x_0)}$ geschlossen $\xRightarrow{\substack{\uparrow \\ B_\varepsilon(x_0) \text{ ist} \\ \text{sternf\"ormig}}} \omega|_{B_\varepsilon(x_0)}$ exakt. $\square$

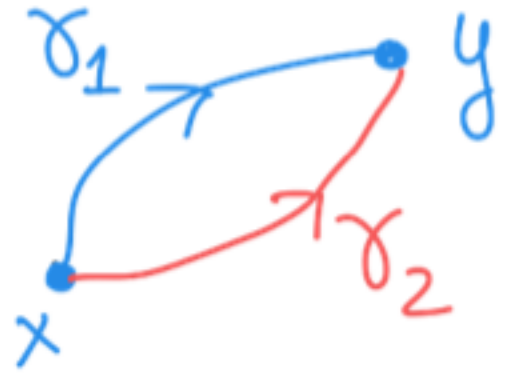
Beispiel $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist
lokal exakt.

Satz $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend offen, ω 1-Form auf U .
Die folgende Aussagen sind äquivalent.

- 1) ω ist exakt
- 2) ω ist lokal exakt und $\forall \gamma$ Schleife in U , $\int_{\gamma} \omega = 0$
- 2') $\forall \gamma$ teilweise C^1 Schleife in U , $\int_{\gamma} \omega = 0$
- 2'') $\forall \gamma$ teilweise stark affine Schleife in U , $\int_{\gamma} \omega = 0$
- 4) ω ist lokal exakt und $\forall \gamma_1, \gamma_2$ Wegen in U mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$
und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, gilt $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$
- 4') $\forall x, y \in U$, $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, x, y)_{t.c^1}$, $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$
- 4'') $\forall x, y \in U$, $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, x, y)_{t.s.aff}$, $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

BWs $2 \Rightarrow 2' \Rightarrow 2''$, $4 \Rightarrow 4' \Rightarrow 4''$: ok.

$2 \Rightarrow 4$, $2' \Rightarrow 4'$, $2'' \Rightarrow 4''$:



$\gamma_1 * \iota(\gamma_2)$ ist eine Schleife

$$0 = \int_{\gamma_1 * \iota(\gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

$4 \Rightarrow 2$, $4' \Rightarrow 2'$, $4'' \Rightarrow 2''$: γ und $c_\gamma(o)$.

$1 \Rightarrow 2$: sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω .

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine Schleife.

$F \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von ω entlang γ

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = 0$$

$\uparrow \gamma(a) = \gamma(b)$

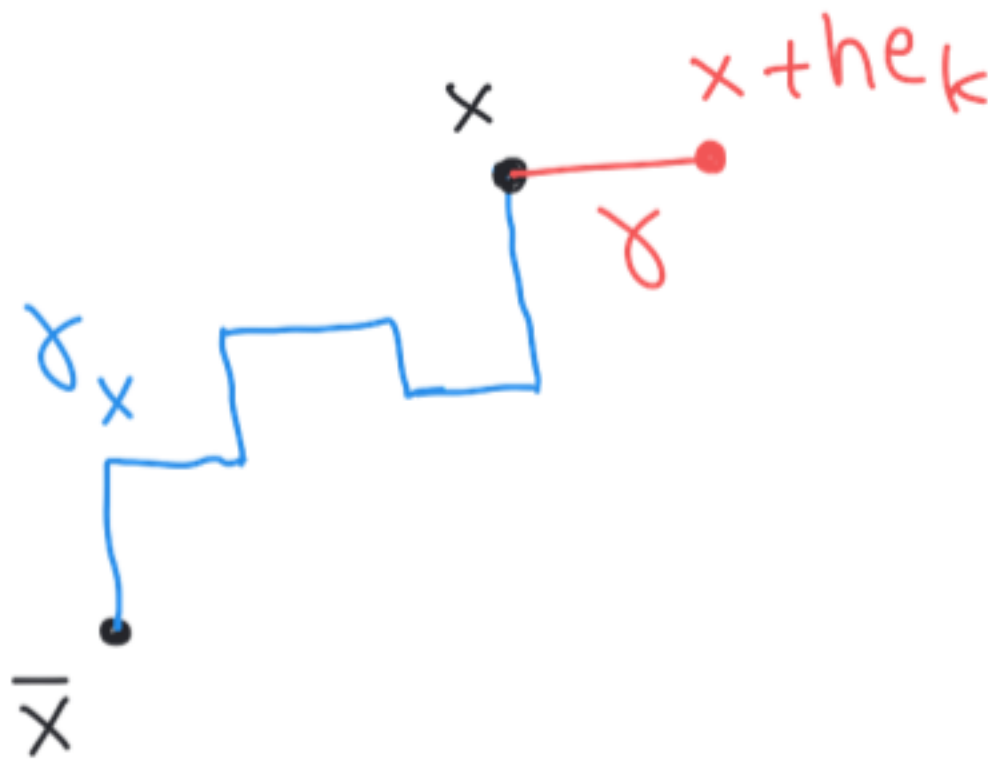
4'' $\Rightarrow$ 1: Sei $\bar{x} \in U$ fest. Betrachte

$$F: U \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{\gamma_x} \omega \quad \text{wobei } \gamma_x \in \Omega(U, \bar{x}, x) \text{ t.s.aff beliebig}$$

F ist wohldefiniert nach 4''.

Sei $x \in U$. $1 \leq k \leq n$

Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\overline{B_{|h|}(x)} \subset U$.



$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{B_{|h|}(x)} \subset U \\ t \mapsto x + t h e_k$$

$$\Rightarrow \gamma_x * \gamma \in \Omega(U, \bar{x}, x + h e_k) \text{ t.s.aff}$$

$$\Rightarrow F(x + h e_k) = \int_{\gamma_x * \gamma} \omega$$

$$\Rightarrow F(x + h e_k) - F(x) = \int_{\gamma_x * \gamma} \omega - \int_{\gamma_x} \omega = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \omega_k(x + t h e_k) \cdot h dt =$$

$$= \int_0^h \omega_k(x + se_k) ds = h \cdot \omega_k(x + \xi e_k) \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } h$$

↑
Mittelwertsatz der
Integralrechnung

$$\frac{F(x + he_k) - F(x)}{h} = \omega_k(x + \xi e_k)$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_k(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + he_k) - F(x)}{h} = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$$

↑
 ω_k stetig

$$x \in U \text{ war beliebig} \Rightarrow \omega_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} \quad \square$$