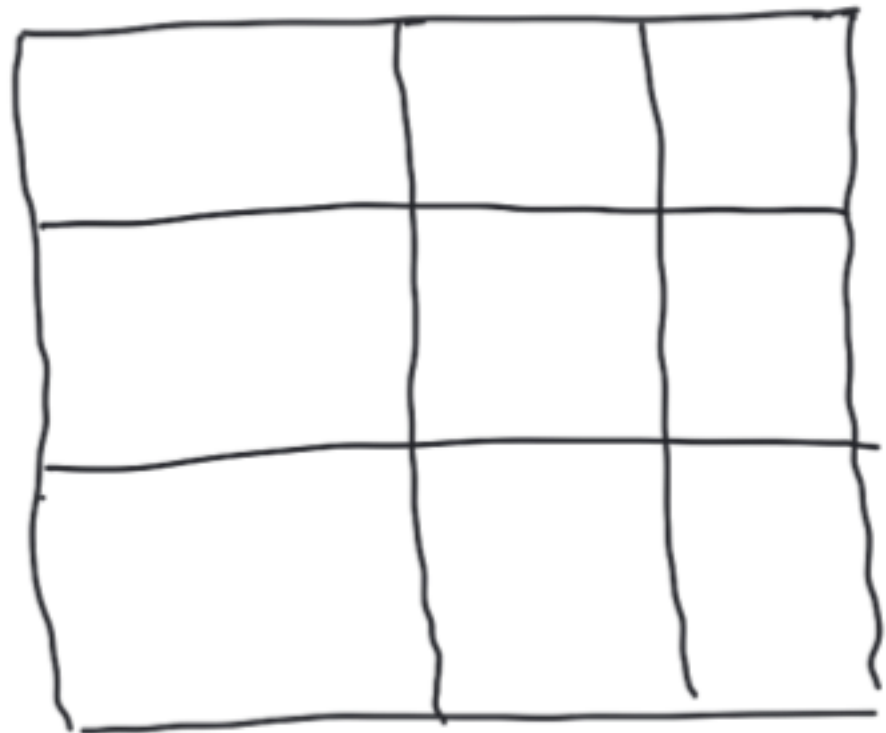


Satz  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  lokal exakt 1-Form auf  $U$ .  
 $\gamma_0, \gamma_1$  weghomotope Wegen in  $U \Rightarrow \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$

Bws Sei  $\delta: [0,1] \times [0,1] \rightarrow U$  eine Weghomotopie zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ .  
 $\delta(\cdot, 0) = \gamma_0, \delta(\cdot, 1) = \gamma_1, \forall s \in [0,1] \quad \delta(0,s) = \gamma_0(0) \quad \delta(1,s) = \gamma_0(1)$ .

$\{U_\lambda\}$  offene Überdeckung von  $U$ , s.d.  $\omega|_{U_\lambda}$  exakt ist.

Lebesgue Zahl  $\Rightarrow \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = 1$   
 $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_r < s_{r+1} = 1$

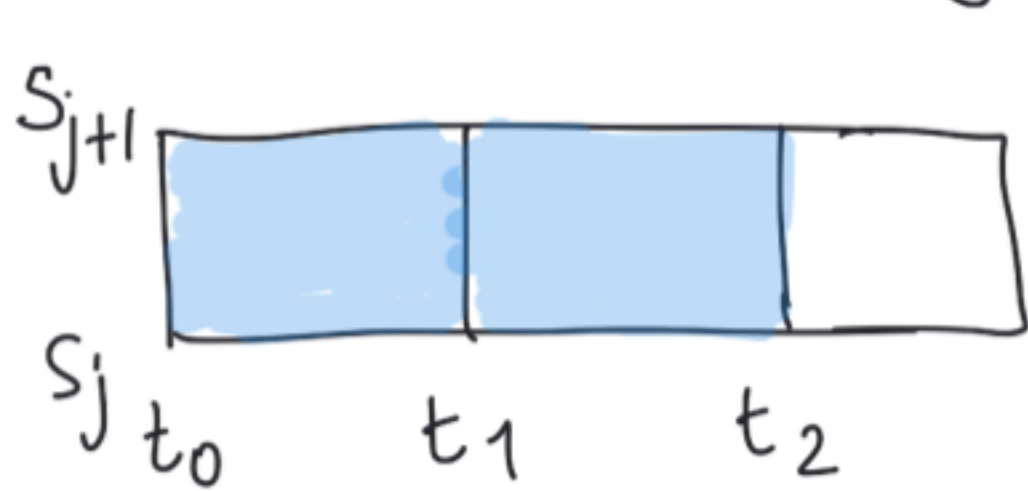


$$\forall 0 \leq i, j \leq r$$

$$\delta([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subseteq U_{\lambda_{ij}} \quad \lambda_{ij} \in \Lambda$$

$$F_{i,j}: U_{\lambda_{ij}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Stammfunktion von } \omega|_{U_{\lambda_{ij}}}$$

Sei  $j$  fest. Ich will eine Stammfunktion  $f_j : [0,1] \times [s_j, s_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  von  $\omega$  entlang  $[0,1] \times [s_j, s_{j+1}]$ :



$$f_j(t, s) := F_{0,j}(\delta(t, s)) \quad \text{wenn} \quad \begin{array}{l} t_0 \leq t \leq t_1 \\ s_j \leq s \leq s_{j+1} \end{array}$$

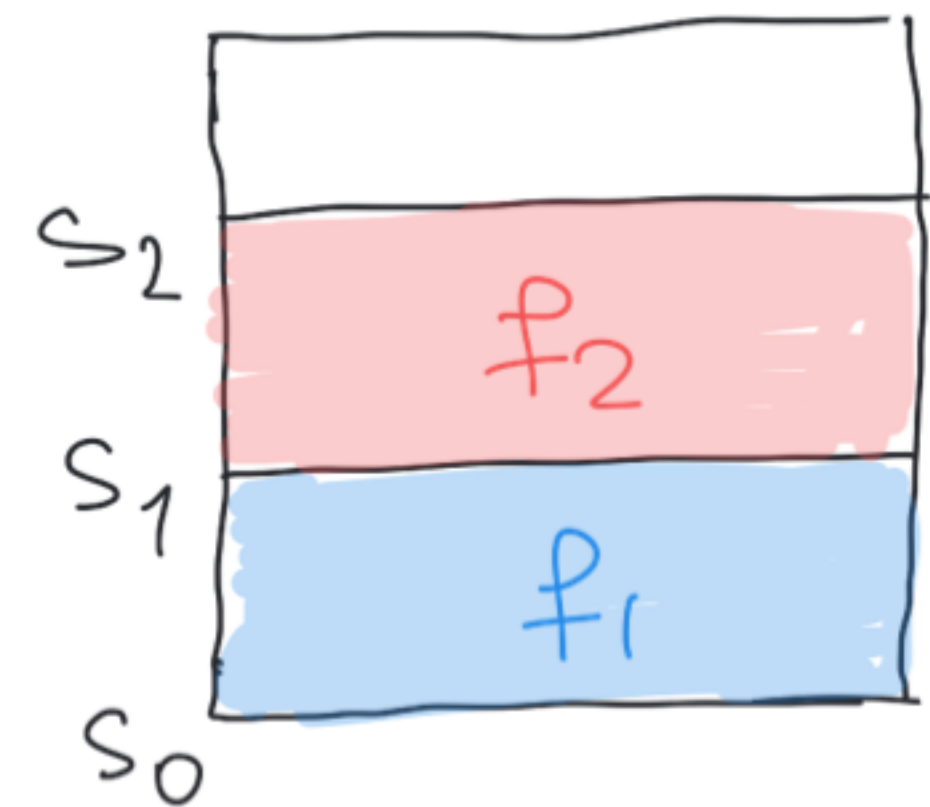
Adding a constant to  $F_{1,j}$ , we can assume  
 $\forall s \in [s_j, s_{j+1}], F_{1,j}(\delta(t_1, s)) = f_j(t, s)$

we extend  $f_j$  to  $[t_0, t_2] \times [s_j, s_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$f_j(t, s) = F_{1,j}(\delta(t, s)) \quad \begin{array}{l} t_1 \leq t \leq t_2 \\ s_j \leq s \leq s_{j+1} \end{array}$$

$$\Rightarrow f_j : [0,1] \times [s_j, s_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall s \in [s_j, s_{j+1}], f_j(\cdot, s) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktion von  $\omega$  entlang  $\delta(\cdot, s)$ .



$$\forall j=0, \dots, n \quad f_j : [0,1] \times [s_j, s_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall s \in [s_j, s_{j+1}]$ ,  $f_j(\cdot, s)$  Stammfunktion  
von  $\omega$  entlang  $\delta(\cdot, s)$

$f_1(\cdot, s_1)$  und  $f_2(\cdot, s_1)$  Stammfunktionen von  $\delta(\cdot, s)$

$\Rightarrow f_1(\cdot, s_1) - f_2(\cdot, s_1)$  konstant.

If we add a constant to  $f_2$ , we can assume  $f_1(\cdot, s_1) = f_2(\cdot, s_1)$

$$\leadsto f : [0,1] \times [s_0, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall s \in [0,1]$   $f(\cdot, s)$  Stammfunktion  
von  $\omega$  entlang  $\delta(\cdot, s)$

$$\int_{\gamma_0} \omega = \underbrace{f(1,0)}_{\text{green}} - \underbrace{f(0,0)}_{\text{yellow}}$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \underbrace{f(1,1)}_{\text{green}} - \underbrace{f(0,1)}_{\text{yellow}}$$

$\delta(0, \cdot)$  und  $\delta(1, \cdot)$  konstant

$\Rightarrow f(0, \cdot), f(1, \cdot)$  konstant

□

Satz  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  lokal exakt 1-Form auf  $U$ .

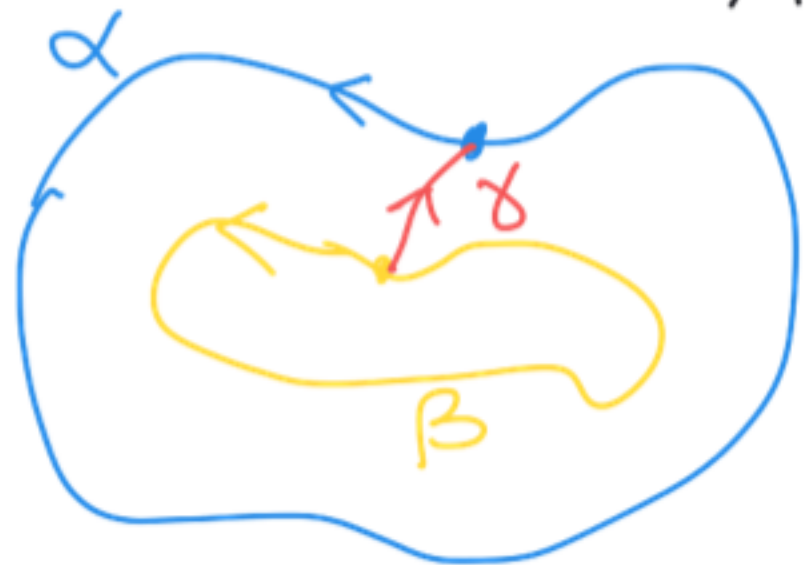
$\alpha, \beta$  Schleife in  $U$ .  $\alpha, \beta$  homolog  $\Rightarrow \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$

BWS  $\gamma \in \Omega(U, \beta(o), \alpha(o))$

$\beta$  weghomotop zu  $\gamma * \alpha * \iota(\gamma) * \varepsilon_1 * \delta_1 * \iota(\varepsilon_1) * \iota(\delta_1) * \dots$

$\dots * \varepsilon_k * \delta_k * \iota(\varepsilon_k) * \iota(\delta_k)$

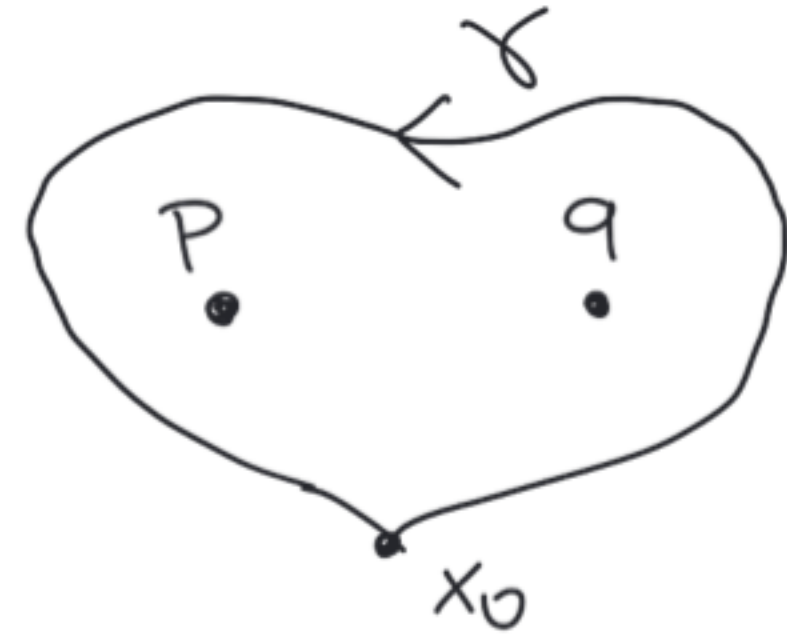
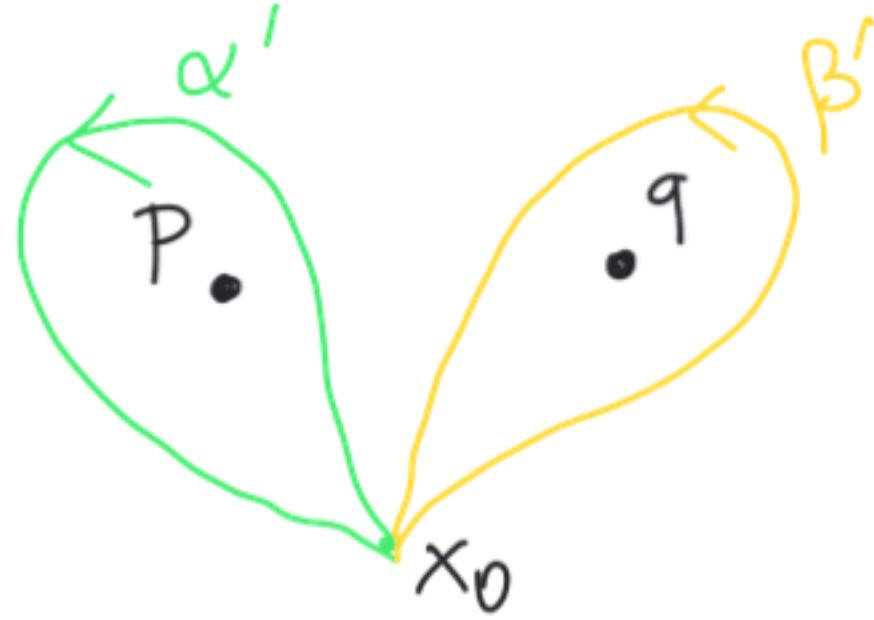
$\varepsilon_i, \delta_i \in \Omega(U, \beta(o), \beta(o))$



$$\int_{\beta} \omega = \int_{\gamma * \dots * \iota(\delta_k)} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\alpha} \omega - \int_{\gamma} \omega + \int_{\varepsilon_1} \omega + \int_{\delta_1} \omega - \int_{\varepsilon_1} \omega - \int_{\delta_1} \omega + \dots$$

$$= \int_{\alpha} \omega. \quad \square$$

Beispiel  $p, q \in \mathbb{R}^2$ ,  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ ,  $\omega$  lokal exakte 1-Form auf  $U$ .



$\alpha, \alpha'$  homolog

$\beta, \beta'$  homolog

$\gamma, \beta' * \alpha'$  weghomotop

$\Rightarrow \gamma$  ist homolog zu  $\alpha + \beta$

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha'} \omega$$

$$\int_{\beta} \omega = \int_{\beta'} \omega$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega$$

Jede Schleife in  $U$  ist homolog zu  $n_1 \alpha + n_2 \beta$  mit  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

Satz  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen zusammenhängend.  $\omega$  1-Form auf  $U$ .  
Sei  $\mathcal{F}$  eine Menge von Schleifen in  $U$ , sodass  
 $\forall \gamma$  Schleife in  $U$ ,  $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{F}$  und  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ :  $\gamma$  ist  
homolog zu  $n_1[\gamma_1] + \dots + n_k[\gamma_k]$ .

Dann:

$\omega$  ist exakt  $\iff \omega$  ist lokal exakt und  
 $\forall \gamma \in \mathcal{F}, \int_{\gamma} \omega = 0$

Bws  $\omega$  exakt  $\iff \omega$  ist lokal exakt und  $\forall \gamma$  Schleife in  $U$   $\int_{\gamma} \omega = 0$

$\gamma$  beliebige Schleife in  $U$ ,  $\gamma$  homolog zu  $n_1[\gamma_1] + \dots + n_k[\gamma_k]$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = n_1 \cdot \int_{\gamma_1} \omega + \dots + n_k \int_{\gamma_k} \omega.$$

□

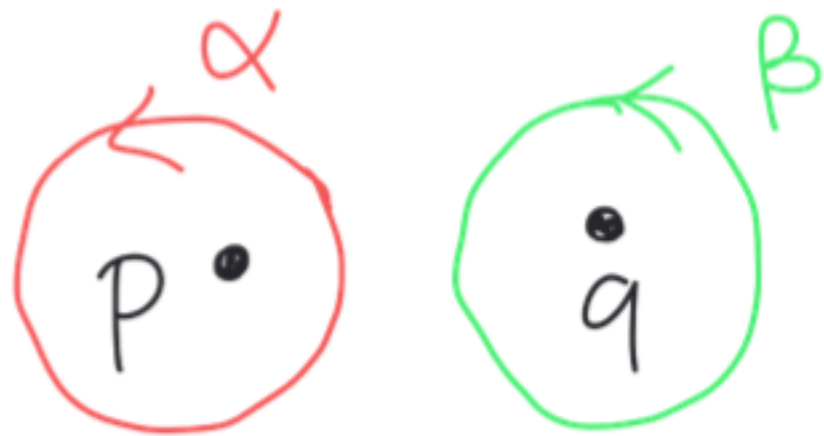
Beispiel  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ .  $r > 0$   
 $\partial B_r(z_0): [0, 2\pi] \rightarrow U$   
 $t \mapsto z_0 + re^{it}$



Sei  $\omega$  eine 1-Form auf  $U$ . Dann

$\omega$  exakt  $\iff \omega$  lokal exakt und  $\int_{\partial B_r(z_0)} \omega = 0$ .

Beispiel  $p, q \in \mathbb{C}$ .  $\omega$  1-Form auf  $\mathbb{C} \setminus \{p, q\}$ . Dann:



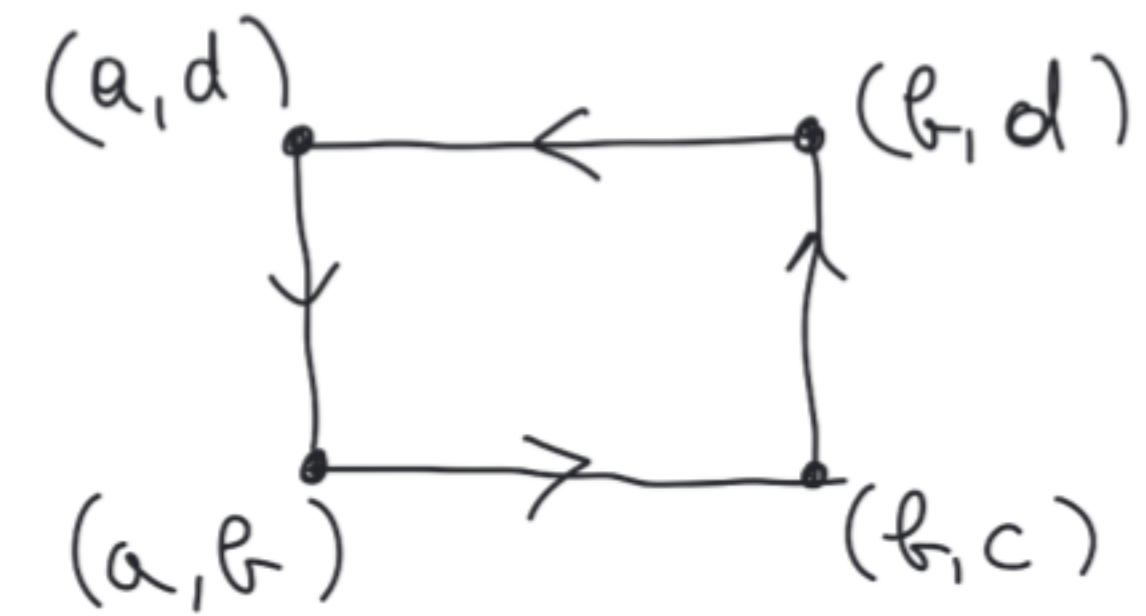
$\omega$  exakt  $\iff \omega$  lokal exakt,  
 $\int_{\alpha} \omega = 0$  und  $\int_{\beta} \omega = 0$

Kor  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, einfach zusammenhängend.

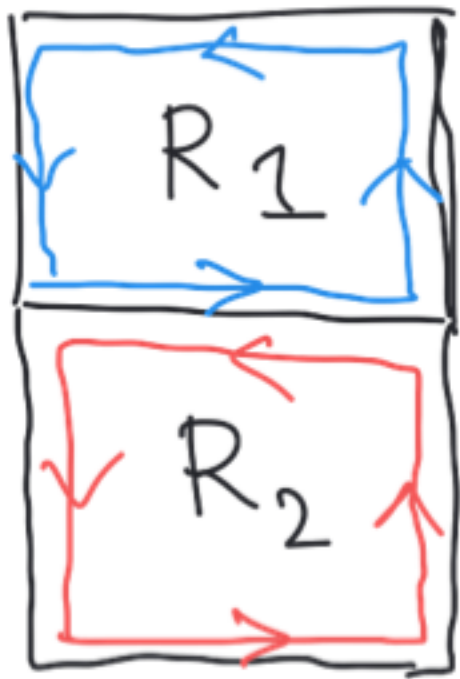
$\omega$  1-Form auf  $U$ . Dann:

$\omega$  exakt  $\Leftrightarrow \omega$  lokal exakt

Ein RECHTECK im  $\mathbb{R}^2$  ist  $R = [a, b] \times [c, d]$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  
 $a < b, c < d$ .  $\partial R$  ist die Schleife  $\partial R: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$



$$t \mapsto \begin{cases} (t, (1-t)c + td) & 0 \leq t \leq 1 \\ ((2-t)b + (t-1)a, d) & 1 \leq t \leq 2 \\ (a, c) & 2 \leq t \leq 3 \\ (b, c) & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

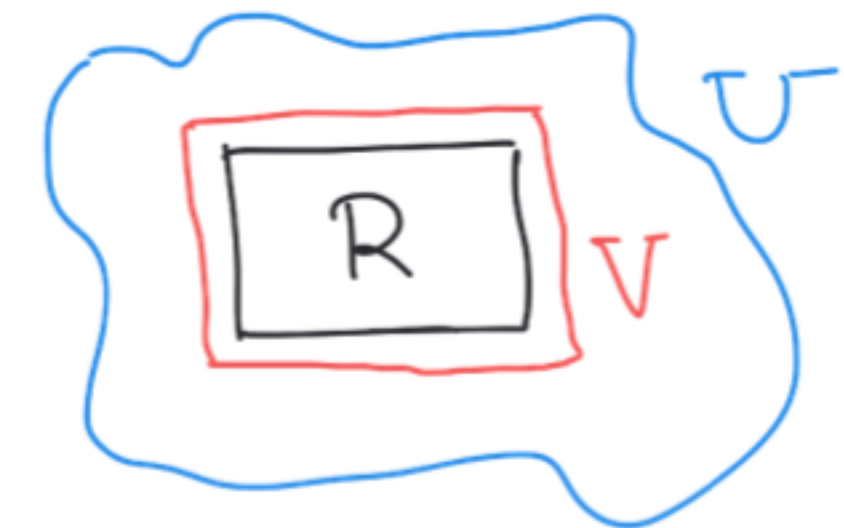


$$\int_{\partial R_1} \omega + \int_{\partial R_2} \omega = \int_{\partial (R_1 \cup R_2)} \omega$$

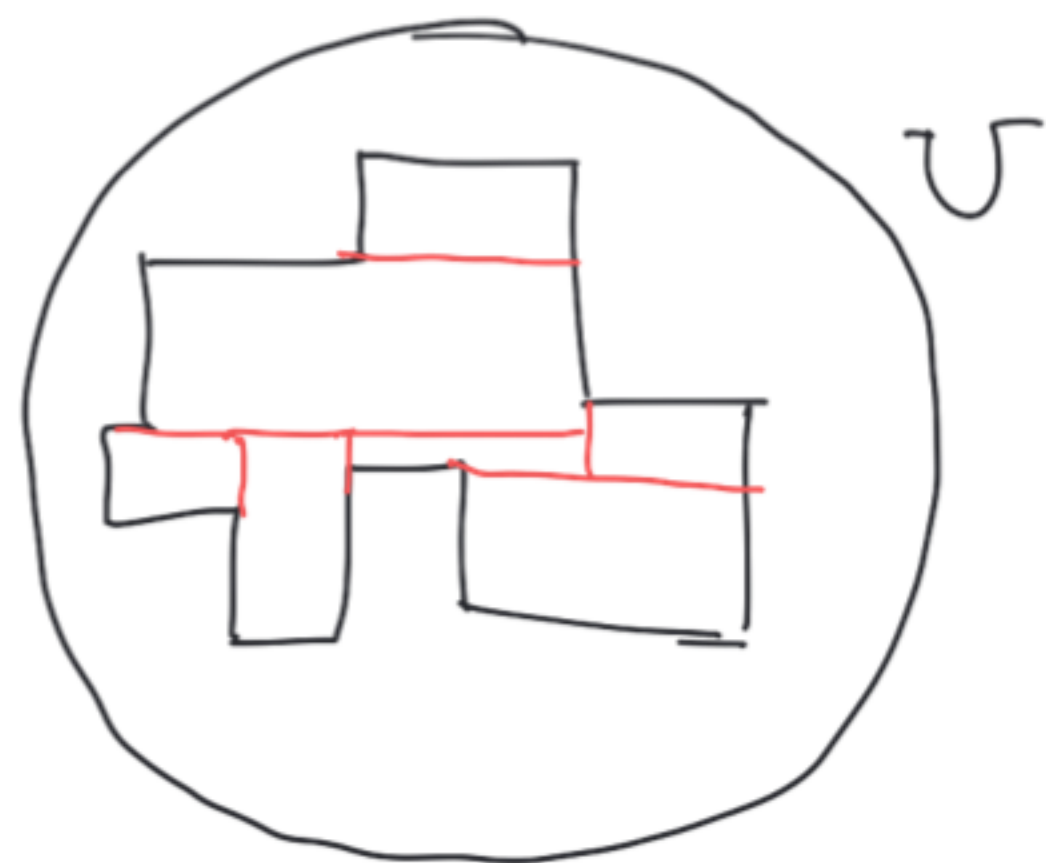
Satz  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $\omega$  1-Form auf  $U$ . Dann:

$\omega$  lokal exakt  $\Leftrightarrow \forall R \subset U$  Rechteck,  $\int_{\partial R} \omega = 0$

Bws  $\Rightarrow$ )  $R \subset U$  Rechteck.  $\Rightarrow V$  offenes Rechteck,  $R \subset V \subset U$   
 $\omega|_V$  exact, weil  $V$  einfach zhd ist  
 $\partial R$  Schleife in  $V \Rightarrow \int_{\partial R} \omega = 0$ .



$\Leftarrow$ ) Can assume that  $U$  is a ball



$\forall \gamma \in \Omega(U, z_0, z_0)$  t.s. off

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$



$R_1, \dots, R_k \subset U$  Rechtecke

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial R_i} \omega = 0.$$

□