

Dieses Video ist völlig fakultativ.

Wenn Sie nicht interessiert sind, können Sie es problemlos auslassen

Def Die KOMMUTATOR-UNTERGRUPPE zu einer Gruppe G ist die Untergruppe $G' \subseteq G$, die von den Elementen $aba^{-1}b^{-1}$ mit $a, b \in G$ erzeugt wird.

Bem G ist abelsch $\Leftrightarrow G' = \{e\}$.

Satz G Gruppe $\Rightarrow G'$ ist eine normale Untergruppe von G .

Bws $a, b, g \in G$ $g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} = ga\bar{g} \cdot g\bar{b}\bar{g}^{-1}(ga\bar{g}^{-1})^{-1}(g\bar{b}\bar{g}^{-1})^{-1} \in G'.$ $\square$

Def Die ABELISIERUNG einer Gruppe G ist die Faktorgruppe

$$G^{ab} := G / G'$$

Es gibt $G \twoheadrightarrow G^{ab}$ surjektiven Gruppenisomorphismus.

Beispiel 1) G abelsche Gruppe $\Rightarrow G \rightarrow G^{ab}$ Gruppenisomorphismus

2) $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ freie Gruppe mit 2 Erzeuger.

$\Rightarrow G^{ab} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ freie abelsche Gruppe mit 2 Erzeuger.

3) $G = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{k \text{ mal}}$ freie Gruppe mit k Erzeuger.

$\Rightarrow G^{ab} \simeq \mathbb{Z}^k$ freie abelsche Gruppe mit k Erzeuger.

4) $G = S_3$ symmetrische Gruppe $\Rightarrow G^{ab} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lemma $\varphi: G \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismus.

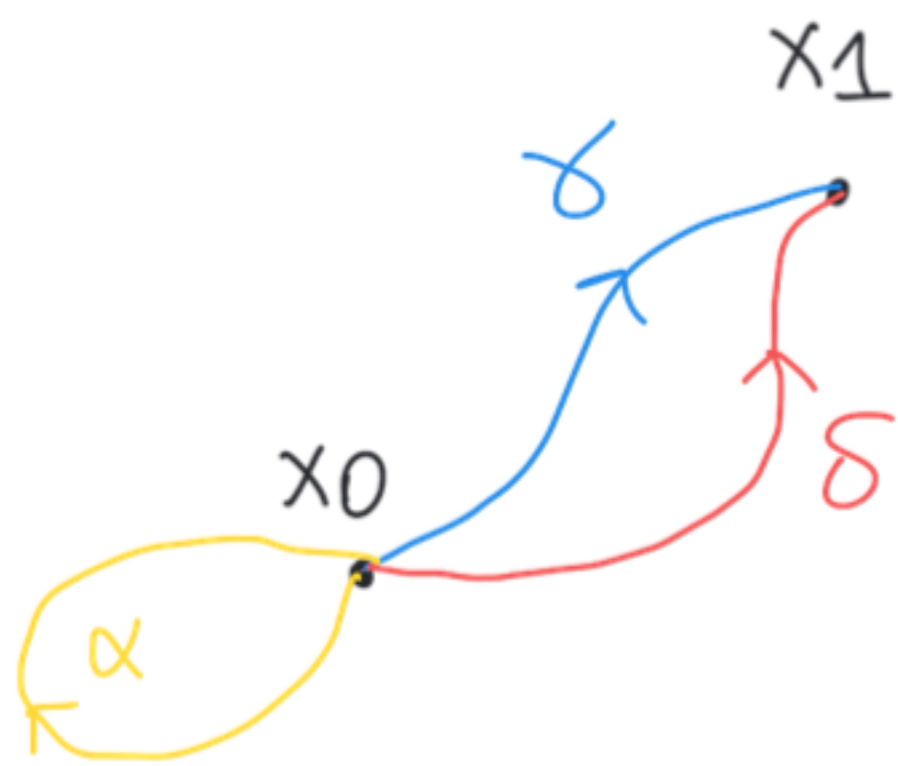
$\Rightarrow \varphi(G') \subseteq H'$. Deshalb haben wir einen Gruppenhomomorphismus $\varphi^{ab}: G^{ab} \rightarrow H^{ab}$, $gG' \mapsto \varphi(g)H'$.

Bws $\forall a, b \in G$ $\varphi(a b a^{-1} b^{-1}) = \varphi(a) \varphi(b) \varphi(a)^{-1} \varphi(b)^{-1} \in H'$.
 φ^{ab} ist wohldefiniert und Gruppenhomomorphismus. $\square$

Satz $\varphi: G \rightarrow H$ und $\psi: G \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen.

Wenn $\forall a \in G$ $\varphi(a) \psi(a^{-1}) \in H'$ gilt, dann $\varphi^{ab} = \psi^{ab}$.

Bws $\forall a \in G$, $\varphi^{ab}(aG') = \varphi(a)H' = \psi(a)H' = \psi^{ab}(aG')$. $\square$



Satz X top. Raum, $x_0, x_1 \in X$, $\gamma, \delta \in \Omega(X, x_0, x_1)$

$$\gamma_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$\delta_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$\Rightarrow (\gamma_{\#})^{ab} = (\delta_{\#})^{ab} : \pi_1(X, x_0)^{ab} \rightarrow \pi_1(X, x_1)^{ab}$$

Bws Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$ beliebig.

$$\gamma_{\#}([\alpha]) = [\iota(\gamma) * \alpha * \gamma], \quad \delta_{\#}([\alpha]) = [\iota(\delta) * \alpha * \delta]$$

$$\gamma_{\#}([\alpha]) \cdot \delta_{\#}([\alpha]^{-1}) = [\iota(\gamma) * \alpha * \gamma] \cdot [\iota(\delta) * \iota(\alpha) * \delta] =$$

$$= [\iota(\gamma) * \alpha * \gamma * \iota(\delta) * \iota(\alpha) * \delta]$$

$$= [\iota(\gamma) * \alpha * \gamma] [\iota(\delta) * \gamma] [\iota(\gamma) * \alpha * \gamma]^{-1} [\iota(\delta) * \gamma]^{-1} \in \pi_1(X, x_1)'. \quad \square$$

X wegzusammenhängende top. Raum.

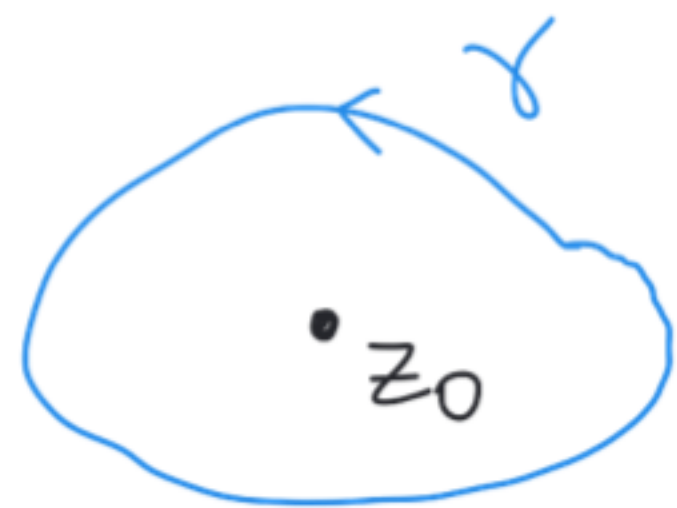
$x_0, x_1 \in X \Rightarrow$ die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ sind isomorph, aber der Isomorphismus hängt vom Weg von x_0 nach x_1 ab, der gewählt wird. Trotzdem hängt der Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ und $\pi_1(X, x_1)^{\text{ab}}$ nicht vom Weg von x_0 nach x_1 ab, d.h. er ist kanonisch.

Def Die erste HOMOLOGIEGRUPPE eines wegzusammenhängenden topologischen Raumes X ist

$$H_1(X; \mathbb{Z}) := \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$$
 mit einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$.

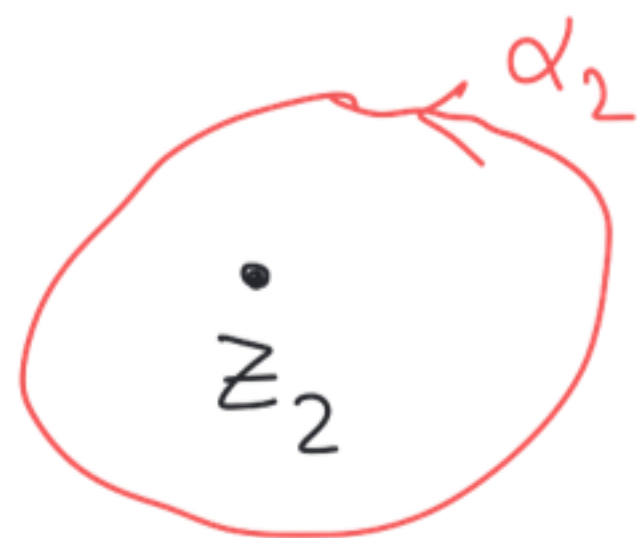
Beispiel X einfach zusammenhängend $\Rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$.

Beispiel 1) $z_0 \in \mathbb{C}$, $U = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$



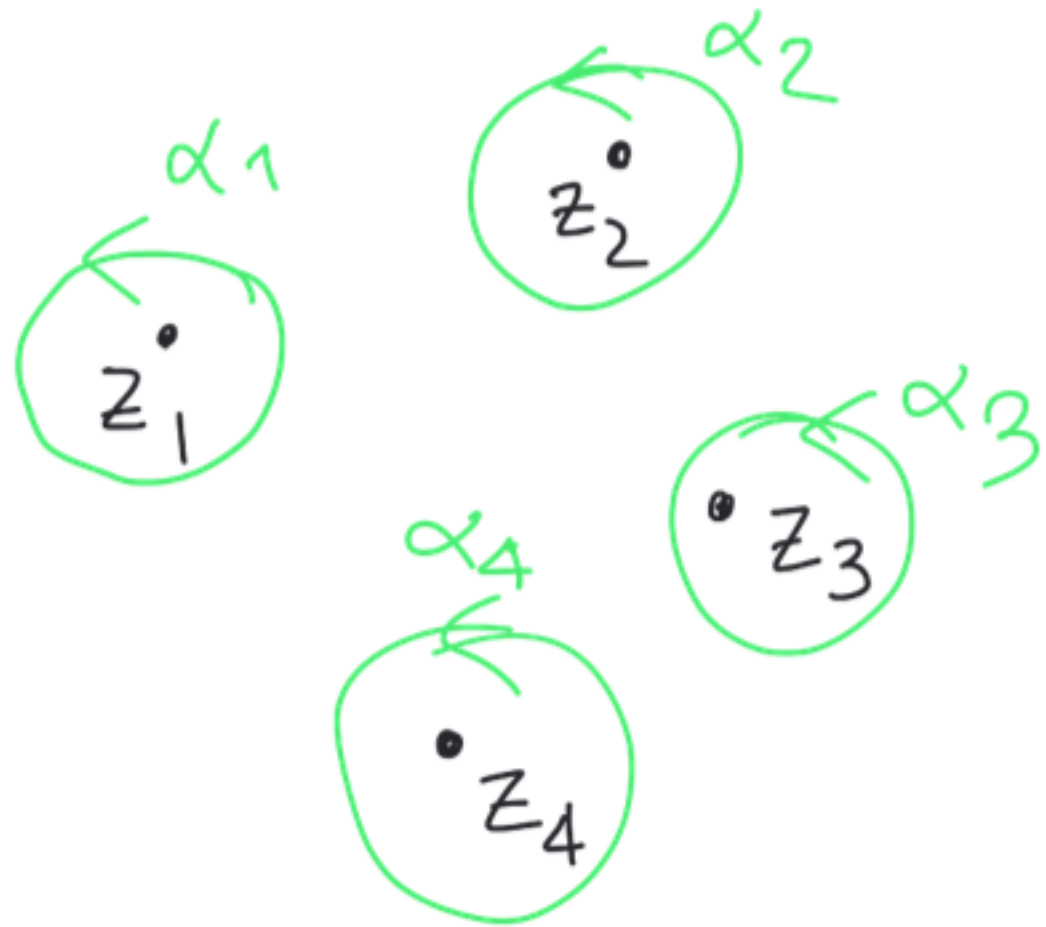
$\mathbb{Z} \longrightarrow H_1(U; \mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus
 $k \longmapsto k[\alpha]$

2) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $U = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$



$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_1(U; \mathbb{Z})$
 $(k_1, k_2) \longmapsto k_1[\alpha_1] + k_2[\alpha_2]$
ist ein Isomorphismus

3) $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ distinct, $U = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$



$$\mathbb{Z}^k \longrightarrow H_1(U; \mathbb{Z})$$

$$(n_1, \dots, n_k) \longmapsto n_1[\alpha_1] + \dots + n_k[\alpha_k]$$

$$(W(\gamma, z_1), \dots, W(\gamma, z_k)) \longleftarrow [\gamma]$$

Satz $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen zusammenhängend.

ω 1-Form auf U .

$\mathcal{F}$ Menge von Schleifen in U , s.d. $\{[\gamma] \in H_1(U; \mathbb{Z}) \mid \gamma \in \mathcal{F}\}$ ein Erzeugendensystem der Gruppe $H_1(U; \mathbb{Z})$ ist.

Dann:

$$\omega \text{ exakt} \iff \begin{array}{l} \omega \text{ lokal exakt und} \\ \forall \gamma \in \mathcal{F} \quad \int_{\gamma} \omega = 0 \end{array}$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1-Formen} \\ \text{auf } U \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal exakte} \\ \text{1-Formen} \\ \text{auf } U \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{exakte} \\ \text{1-Formen} \\ \text{auf } U \end{array} \right\}$$

Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Def Die ERSTE DE-RHAM - COHOMOLOGIE - GRUPPE von U ist

$$H_{\text{dR}}^1(U) := \frac{\{\text{lokal exakte 1-Formen auf } U\}}{\{\text{exakte 1-Formen auf } U\}}.$$

Diese ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Bem $H_{\text{dR}}^1(U) = 0 \iff$ jede lokal exakte 1-Form auf U ist exakt.

V Vektorraum über dem Körper K

$b: V \times V \rightarrow K$ Bilinearform

$V^V = \text{Hom}_K(V, K)$ Dualraum

$\forall v \in V \quad b(v, \cdot) : V \rightarrow K$ linear
 $w \mapsto b(v, w)$

$\Rightarrow \forall v \in V \quad b(v, \cdot) \in V^V$

Dann: $\delta_b : V \rightarrow V^V$ linear
 $v \mapsto b(v, \cdot)$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen zusammenhängend.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{lokal exakte} \\ 1\text{-Formen} \\ \text{auf } U \end{array} \right\} \times H_1(U; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, [\gamma]) \longmapsto \int_{\gamma} \omega$$

wohldefiniert, weil:
 γ_1, γ_2 homologe
Schleifen
 ω lokal exakt
 $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

bilinear: $\int_{\gamma} (\omega + \eta) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} \eta$, $\int_{\gamma} \lambda \omega = \lambda \cdot \int_{\gamma} \omega \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$H_{\text{dR}}^1(U) \times H_1(U; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$([\omega], [\gamma]) \longmapsto \int_{\gamma} \omega$$

wohldefiniert, weil:
 γ Schleife, ω exakt
 $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$

$$\Rightarrow H_{dR}^1(U) \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(U; \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \quad \mathbb{R}\text{-linear}$$

$$[\omega] \longmapsto \left[\begin{array}{l} \int \omega : H_1(U; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R} \\ [\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} \omega \end{array} \right]$$

Φ ist injektiv:

ω lokal exakt
 $\forall \gamma$ Schleife in $U \quad \int_{\gamma} \omega = 0 \quad \} \Rightarrow \omega \text{ exakt} \Rightarrow [\omega] = 0 \text{ in } H_{dR}^1(U).$

Satz $H_{dR}^1(U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(U; \mathbb{Z}); \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ -linear injektiv

Satz (de Rham) Es ist ein Isomorphismus

It can be generalised:

- replace U with manifold
- $H_{dR}^p(U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(U; \mathbb{Z}); \mathbb{R})$