

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \cdot \int_a^b v(t) dt$$

wobei $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = u + iv$

Satz $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Hausaufgabe!

1-Formen auf offenen Teilmengen vom $\mathbb{C}$
Wir erlauben, dass die Werten in $\mathbb{C}$ sind:

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $P: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $Q: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig

$$P \cdot dx + Q \cdot dy.$$

$$dz := dx + i \, dy$$

$$d\bar{z} := dx - i \cdot dy$$

$$\begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$$

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen

ω 1-Form auf U mit Werten in $\mathbb{C}$

$\omega = Pdx + Qdy$ mit $P: U \rightarrow \mathbb{C}, Q: U \rightarrow \mathbb{C}$

• ω (lokal) exakt $\Leftrightarrow$ $(\operatorname{Re} P)dx + (\operatorname{Re} Q)dy$ (lokal) exakt
 $(\operatorname{Im} P)dx + (\operatorname{Im} Q)dy$

• $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} ((\operatorname{Re} P)dx + (\operatorname{Re} Q)dy) + i \cdot \int_{\gamma} ((\operatorname{Im} P)dx + (\operatorname{Im} Q)dy)$$

Satz $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, γ teilweise C^1 Weg in U
 $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$

Def $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -differenzierbar. Dann:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) : U \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) : U \rightarrow \mathbb{C}$$

Satz $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

BWS Einfach, aber langweilig.

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -differenzierbar. Dann:

$$f \text{ holomorph} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

In diesem Fall, $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ und $df = f'(z) dz$.

BWS $f = u + iv$ mit $u: U \rightarrow \mathbb{R}$, $v: U \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'$$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann

$g(z)dz$ ist
exakt
auf U

$\Leftrightarrow$

$\exists f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und C^1 ;
 $f' = g$

$\Leftarrow$) Voriger Satz $\Rightarrow df = f'(z)dz = g(z)dz$. Deshalb f ist
eine Stammfunktion von der 1-Form $g(z)dz$ auf U .

$\Rightarrow$) es gibt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ C^1 s.d. $g(z)dz = df$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

$\{dz, d\bar{z}\}$ Basis $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = g, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Voriger Satz



f holomorph

und $f' = g$.