

Satz (Goursat) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$

$\Rightarrow$ die 1-Form $\omega = f(z)dz$ auf U ist lokal exakt.

Beweis mit zusätzlicher Hypothese: f ist C^1

$f \in C^1 \Rightarrow f = u + iv$, $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $v: U \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$.

$$\omega = (u + iv)(dx + i dy) = (u + iv)dx + (-v + iu)dy$$

$$\frac{\partial(u + iv)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v + iu)}{\partial x}$$

$\uparrow$ Cauchy-Riemann

$\Rightarrow \omega$ geschlossen $\Rightarrow \omega$ lokal exakt. $\square$

Bem $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ Polynom
 $z \mapsto \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad a_j \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z)dz$ exakt auf U .

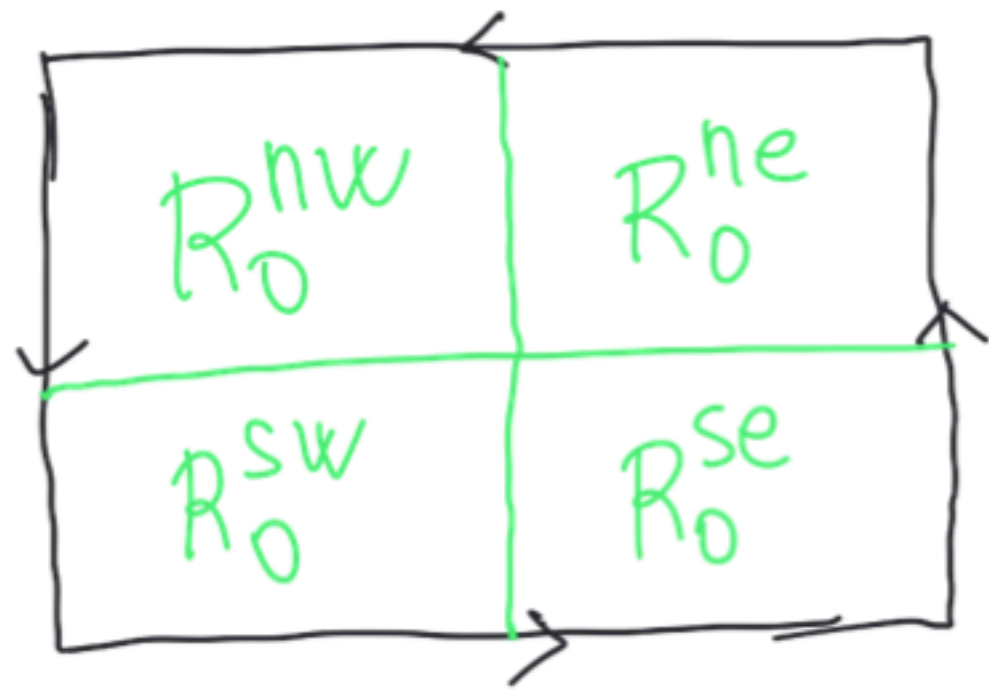
Bws $\sum_{j=0}^n a_j \frac{z^{j+1}}{j+1}$ ist eine Stammfunktion. $\square$

Genereller Beweis von Goursat (ohne die Annahme, dass $f \in C^1$ ist)

$\omega = f(z) dz$ auf U .

Sei R_0 ein Rechteck, das eine Teilmenge von U ist.

Sei l die Länge von ∂R_0



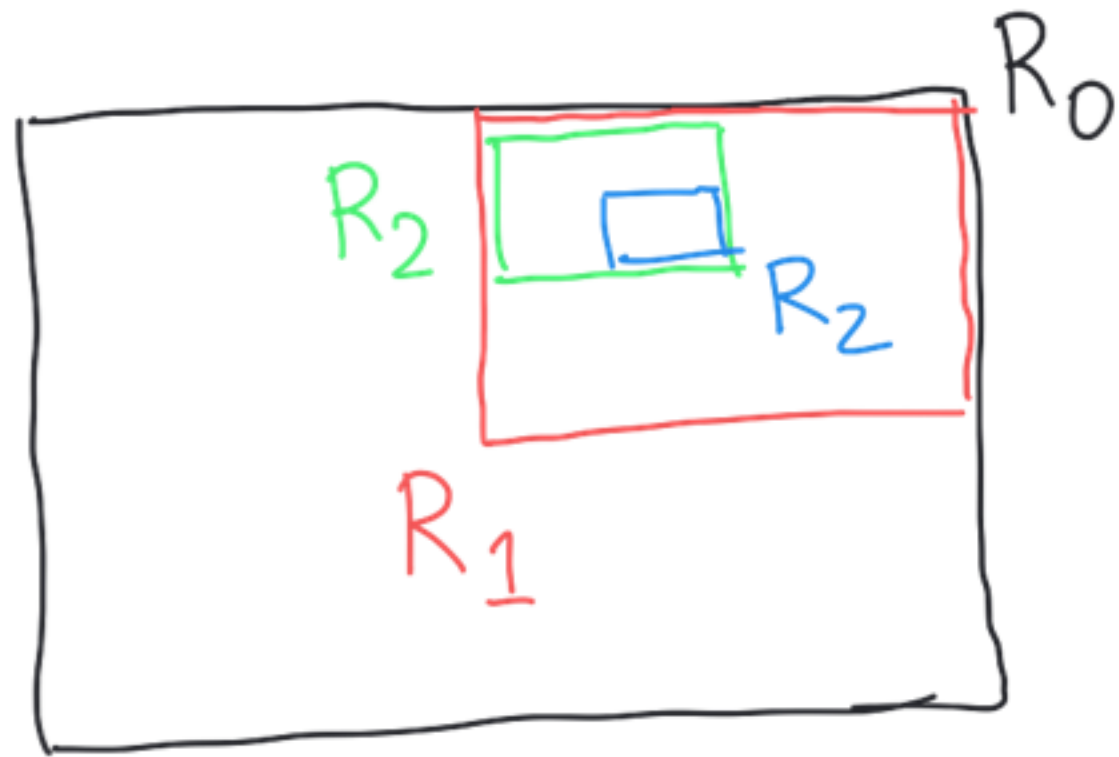
$$\int_{\partial R_0} \omega = \int_{\partial R_0^{ne}} \omega + \int_{\partial R_0^{nw}} \omega + \int_{\partial R_0^{sw}} \omega + \int_{\partial R_0^{se}} \omega$$

$$\left| \int_{\partial R_0} \omega \right| \leq \left| \int_{\partial R_0^{ne}} \omega \right| + \left| \int_{\partial R_0^{nw}} \omega \right| + \left| \int_{\partial R_0^{sw}} \omega \right| + \left| \int_{\partial R_0^{se}} \omega \right|$$

$$\left| \int_{\partial R_0^{ne}} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right| \quad \text{oder} \quad \left| \int_{\partial R_0^{nw}} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right| \quad \text{oder}$$

$$\left| \int_{\partial R_0^{sw}} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right| \quad \text{oder} \quad \left| \int_{\partial R_0^{se}} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right|$$

Sei R_1 eines dieser Rechtecke, sodass $\left| \int_{\partial R_1} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right|$.



We apply the same procedure to R_1 :
we subdivide R_1 into 4 rectangles
and we select R_2 a subrectangle
s.t. $\left| \int_{\partial R_2} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_1} \omega \right|$

We apply the same procedure to R_2 and get R_3 , subrectangle
of R_2 s.t. $\left| \int_{\partial R_3} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_2} \omega \right|$

We have a sequence of rectangles $R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$

• $\left| \int_{\partial R_{n+1}} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_n} \omega \right|$ so $\left| \int_{\partial R_n} \omega \right| \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right|$

• $\text{length of } \partial R_{n+1} = \left(\text{length of } \partial R_n \right) \cdot \frac{1}{2}$ so $\text{length of } \partial R_n = \frac{1}{2^n} l$

• $\bigcap_{n \geq 0} R_n = \{z_0\}$ for some $z_0 \in U$ (Intervallschachtelung)

Wir betrachten $g: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$

f holomorph $\Rightarrow g$ stetig

$$\forall z \in U, \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + g(z) \cdot (z - z_0)$$

Auf U: $\omega = \underbrace{\left(f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) \right) dz}_{\text{exakt mit Stammfunktion}} + g(z) \cdot (z - z_0) dz$

exakt mit Stammfunktion
 $f(z_0) \cdot z + \frac{1}{2} f'(z_0) (z - z_0)^2$

$\forall n \geq 0 \quad \int_{\partial R_n} \omega = \int_{\partial R_n} g(z) \cdot (z - z_0) dz$

Hausaufgabe 5.1c $\Rightarrow \left| \int_{\partial R_n} \omega \right| \leq \left(\begin{smallmatrix} \text{length} \\ \text{of } \partial R_n \end{smallmatrix} \right) \cdot \max_{z \in \partial R_n} |g(z) \cdot (z - z_0)|$

$\leq \frac{l}{2^n} \cdot \max_{z \in \partial R_n} |g(z)| \cdot \max_{z \in \partial R_n} |z - z_0|$

$\leq \frac{l}{2^n} \cdot \max_{\partial R_n} |g| \cdot \frac{l}{2^n} \Rightarrow \left| \int_{\partial R_n} \omega \right| \leq \frac{l^2}{4^n} \cdot \max_{\partial R_n} |g|$

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R_0} \omega \right| \leq \left| \int_{\partial R_n} \omega \right| \leq \frac{l^2}{4^n} \max_{\partial R_n} |g| \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial R_0} \omega \right| \leq l^2 \cdot \max_{\partial R_n} |g|$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{\partial R_n} |g| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial R_0} \omega \right| = 0. \quad \square$$

Kor $U \subseteq \mathbb{C}$ ^{zusammenhängend} offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $\omega = f(z)dz$ 1-Form auf U .

i) Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Schleifen in U , sodass jede Schleife in U homolog zu einer Linearkombination von Schleifen in U mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ ist.

Dann:

ω ist exakt $\Leftrightarrow \forall \gamma \in \mathcal{F} \quad \int_{\gamma} \omega = 0$.

ii) U einfach zusammenhängend $\Rightarrow \omega$ exakt.

Satz (Generalisierung von Goursat) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen
 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\omega = f(z)dz$ 1-Form auf U .

$L \subseteq \mathbb{C}$ horizontale Gerade.

$f|_{U \setminus L}$ holomorph $\Rightarrow \omega$ lokal exakt auf U .

Bws Sei R ein Rechteck in U .

Ich will $\int_{\partial R} \omega = 0$.

$R \cap L = \emptyset$: ok.

$R \cap L \neq \emptyset$; $\varepsilon > 0$ sehr klein

$$\int_{\partial R_\varepsilon^+} \omega = 0, \quad \int_{\partial R_\varepsilon^-} \omega = 0$$

$$\int_{\partial R} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\partial R_\varepsilon^+} \omega + \int_{\partial R_\varepsilon^-} \omega \right) = 0. \quad \square$$

