

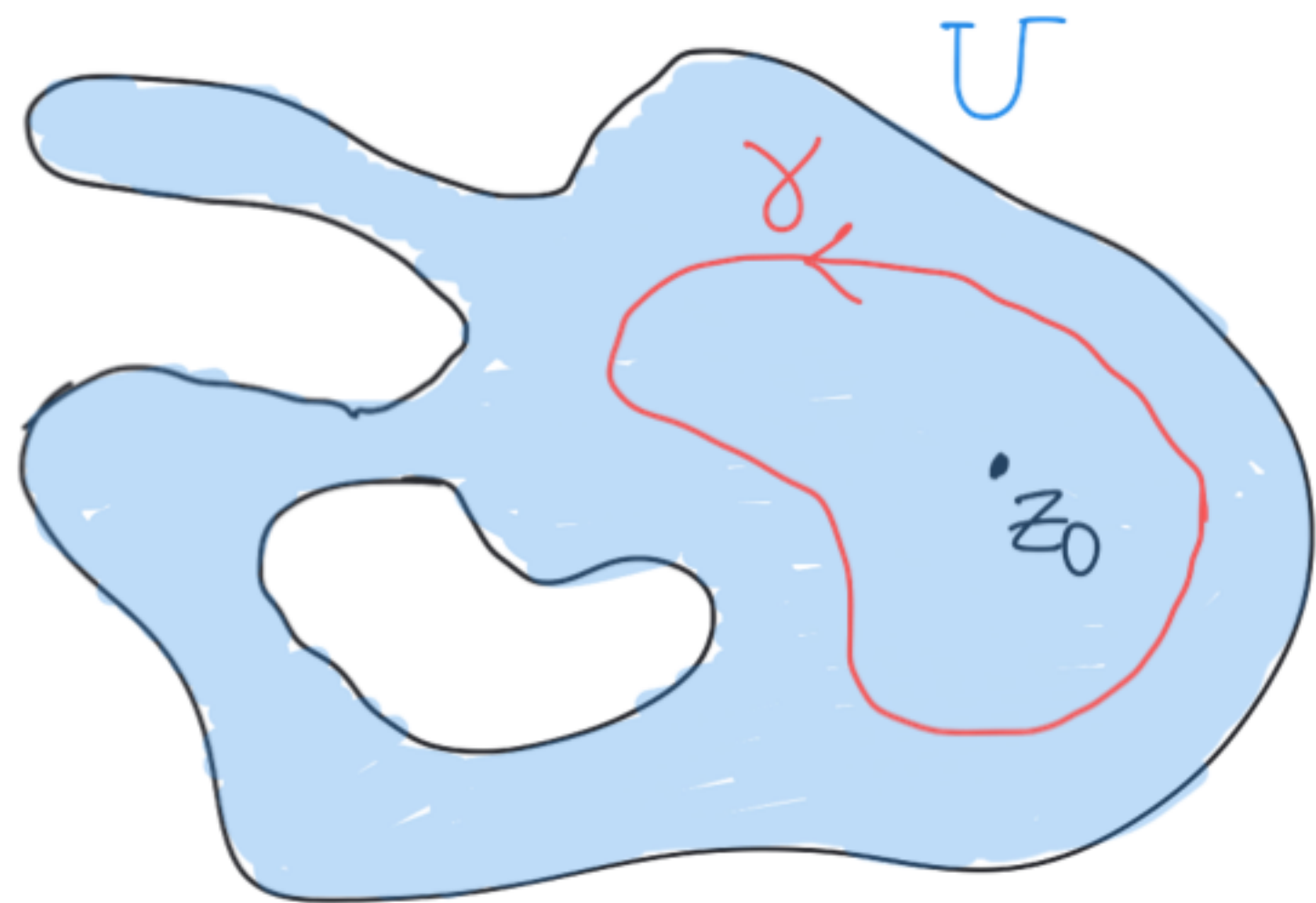
Satz (Cauchysche Integralformel)

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

γ Schleife in $U \setminus \{z_0\}$

γ nullhomolog (homolog zur konstanten Schleife) in U

$$\Rightarrow W(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



Bem $U = \mathbb{C}$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto 1$

Die Cauchyische Integralformel
wird Hausaufgabe 5.2.6

Beweis der Cauchyschen Integralformel

Man betrachte $g: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

$g: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, weil f holomorph ist

$g|_{U \setminus \{z_0\}}$ ist holomorph

Generalisierung von Goursat $\Rightarrow g(z)dz$ ist lokal exakt auf U .

γ nullhomolog in $U \Rightarrow 0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$

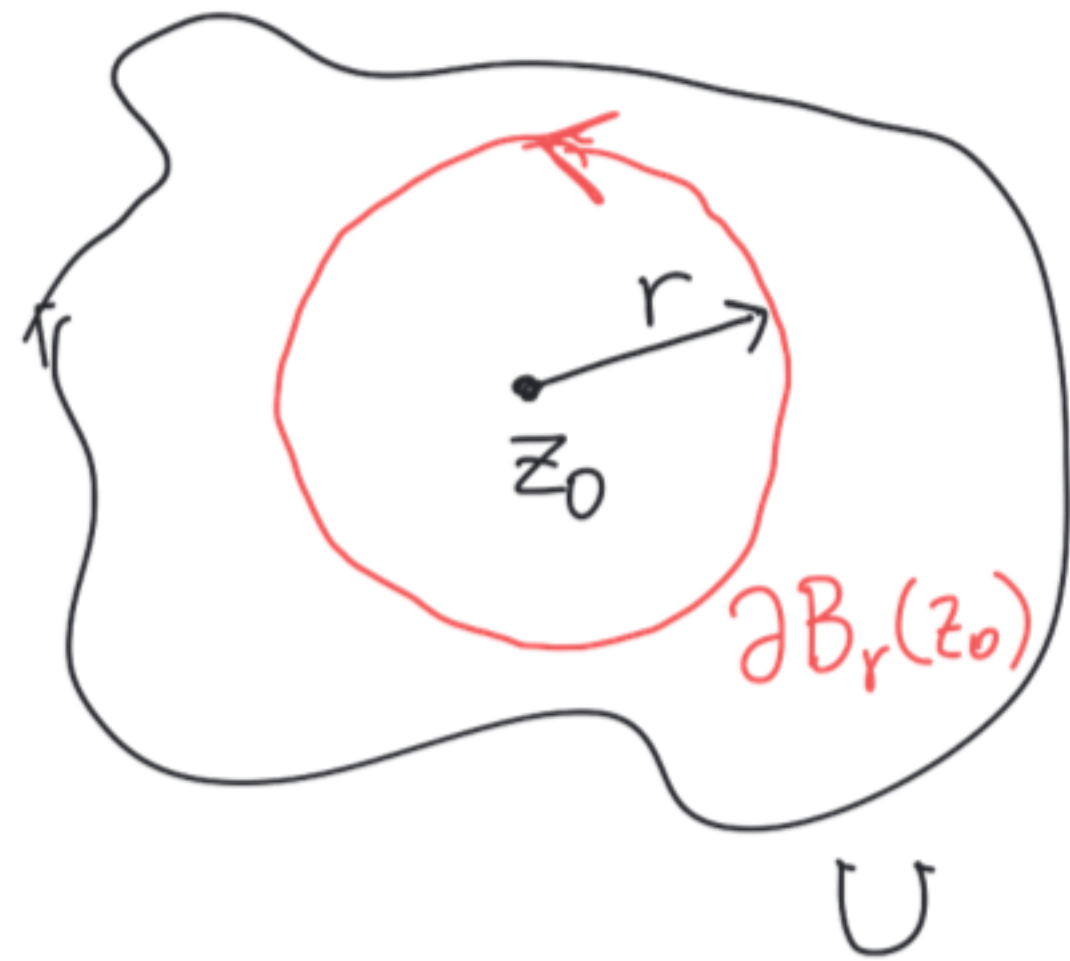
$$= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} =$$

Hausaufgabe 5.2.6

$$= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot W(\gamma, z_0) \quad \square$$

Satz (Cauchy) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$z_0 \in U$, $r > 0$, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$.



$$\partial B_r(z_0): [0, 2\pi] \rightarrow U$$
$$t \mapsto z_0 + re^{it}$$

$$\forall n \geq 0 \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Dann:

1) Der Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ ist $\geq r$.

2) $\forall z \in B_r(z_0)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Kor holomorph $\Leftrightarrow$ analytisch

Kor $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph
 $\Rightarrow$ f ist unendlich oft $\mathbb{C}$ -differenzierbar
und C^∞

Beweis des Satzes von Cauchy

Aufgabe 5.1c

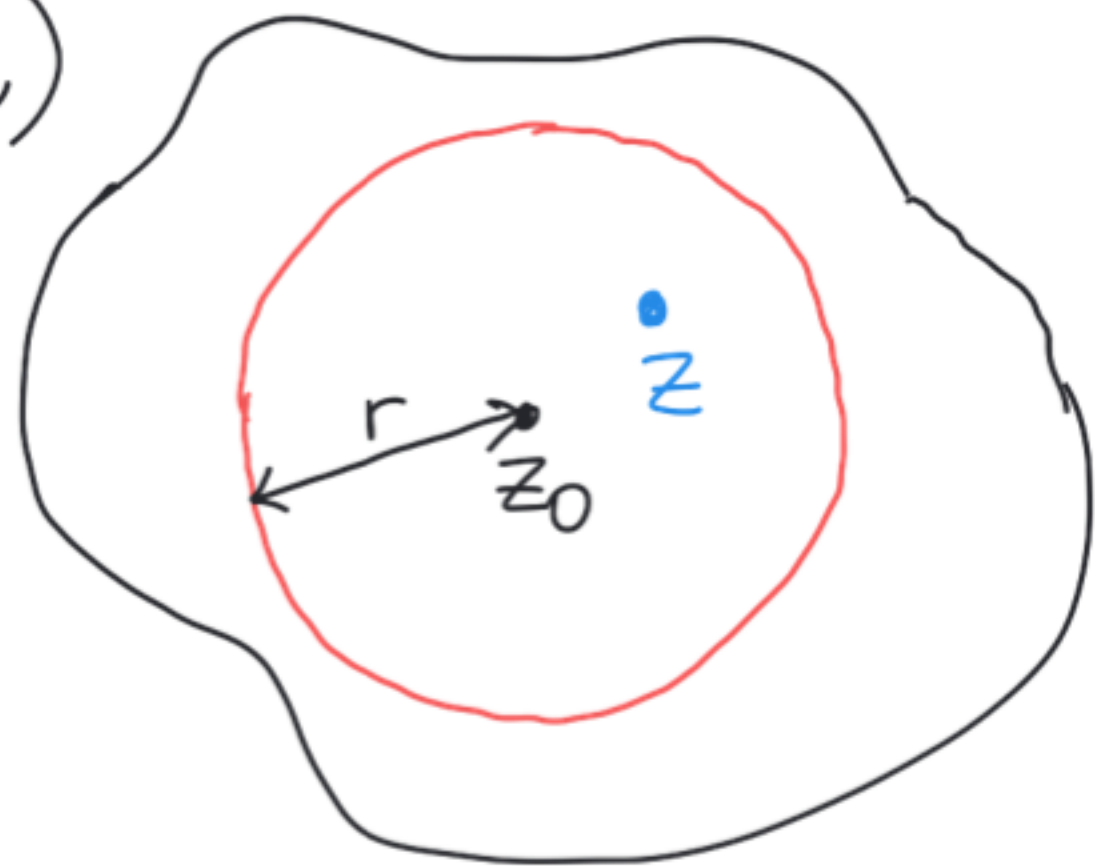
$$1) |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \cdot 2\pi r$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{\partial B_r(z_0)} |f| \cdot \frac{2\pi r}{r^{n+1}} = \max_{\partial B_r(z_0)} |f| \cdot \frac{1}{r^n} \quad M = \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M} \cdot \frac{1}{r} \quad n \rightarrow +\infty \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ ist $\geq r$. $\square$

2)

 $z \in B_r(z_0)$ fest.

$$M = \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$$

$$\forall n \geq 0 \quad g_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \left(\frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n \quad \text{stetig}$$

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad |g_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n$$

Die Funktionenreihe $\sum_{n \geq 0} g_n$ konvergiert normal:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |g_n(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} M \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{|z - z_0|}{r}} < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t) dt. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it} - z_0)^{n+1}} \cdot re^{it} i dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^n} dt = \int_0^{2\pi} g_n(t) dt \cdot \frac{1}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} g_n(t) dt = a_n \cdot (z-z_0)^n \quad (**)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} i dt$$

Cauchy'sche
Integralformel

- $\partial B_r(z_0)$ nullhomolog in U
- $W(\partial B_r(z_0), z) = 1$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{1 - \frac{z - z_0}{re^{it}}} dt = \checkmark \left| \frac{z - z_0}{re^{it}} \right| < 1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t) dt \stackrel{(**)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n. \quad \square$$