

Satz $0 < R \leq +\infty$. ($B_{+\infty}(0) = \mathbb{C}$)

$\{a \in \mathbb{C}[[T]] \mid \text{der Konvergenzradius von } a \text{ ist } \geq R\} \longrightarrow \mathcal{O}(B_R(0))$

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$$

$\longmapsto$

$$\left[\begin{array}{ccc} B_R(0) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right]$$

ist ein Ringisomorphismus.

Bws Injektiver Ringhomomorphismus: schon beweis.

Surjektiv: $f \in \mathcal{O}(B_R(0))$, $0 < r < R$, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

a_n hängt nicht von r ab, weil $\partial B_r(0)$ und $\partial B_{r'}(0)$ homolog in $B_R(0) \setminus \{0\}$ sind, wenn $0 < r' < R$.

$\forall z \in B_r(0)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

r beliebig, ok $B_R(0) = \bigcup_{0 < r < R} B_r(0)$.

□

Satz (Morera) $U \subseteq \mathbb{C}$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

$f(z)dz$ lokal exakt auf U

$\Rightarrow f$ ist holomorph

Bws Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, genügt es den Satz für eine Kreisscheibe U zu beweisen; O.B.d.A. $U = B_r(z_0)$.

$\left. \begin{array}{l} U \text{ einfach zusammenhängend} \\ f(z)dz \text{ lokal exakt auf } U \end{array} \right\} \Rightarrow f(z)dz \text{ exakt auf } U$

Sei $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f(z)dz$.

$$\frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = dg = f(z)dz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow g \in \mathcal{O}(U)$$

$g' = \frac{\partial g}{\partial z} = f \Rightarrow f$ ist die komplexe Ableitung einer holomorphen Abbildung $\Rightarrow f$ ist holomorph. $\square$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1) f ist holomorph (d.h. $\mathbb{C}$ -differenzierbar)
- 2) f ist $\mathbb{R}$ -differenzierbar und $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ erfüllen die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen
- 3) f ist stetig und die 1-Form $f(z)dz$ ist lokal exakt auf U .
- 4) f ist analytisch, d.h. $\forall z_0 \in U, \exists a = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ und $r > 0$:

- $B_r(z_0) \subseteq U$
- der Konvergenzradius von a ist $\geq r$
- $\forall z \in B_r(z_0), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

- 5) $\forall z_0 \in U$ und $\forall r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U, \exists a = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ mit Konvergenzradius $\geq r$:
 $\forall z \in B_r(z_0), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.