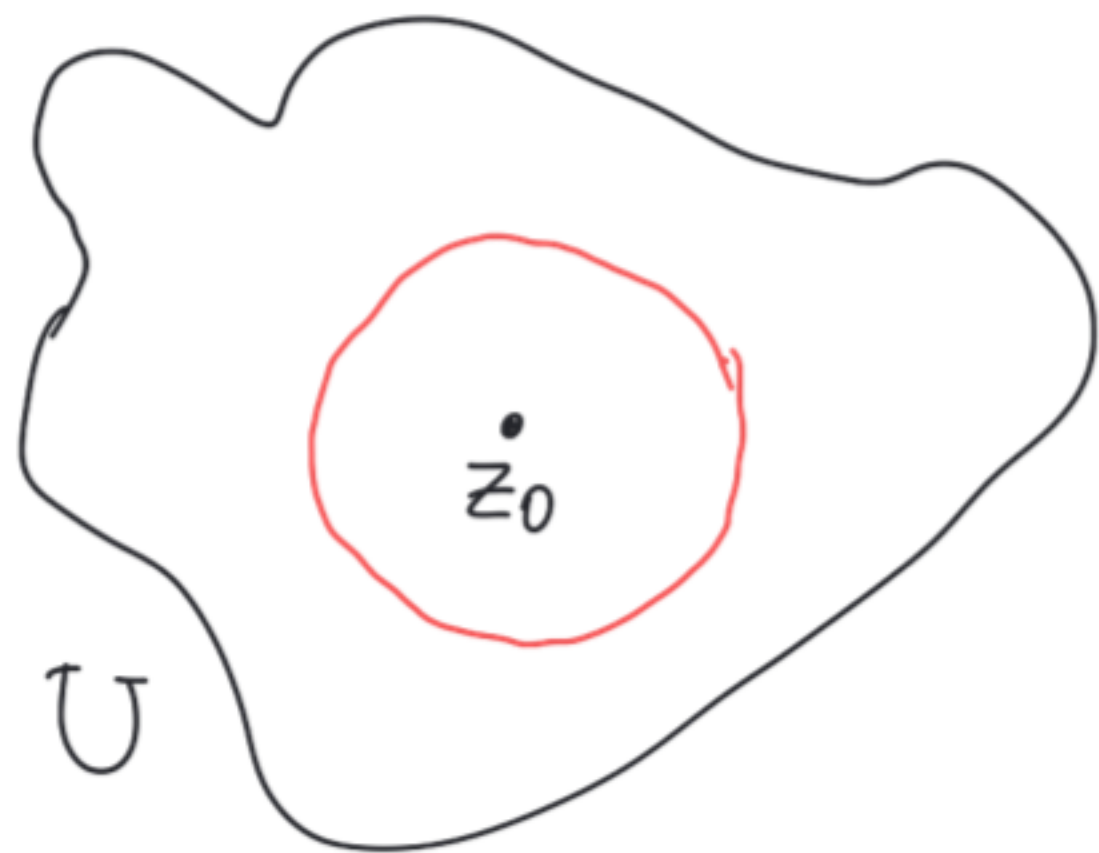


Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $z_0 \in U$.
 $r > 0$ $\overline{B_r(z_0)} \subset U$



$$M = \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$$

$\sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ Potenzreihenentwicklung
von f in z_0 .

Cauchysche
Abschätzung
für die Taylor-
koeffizienten

Dann:

$$\forall n \geq 0, |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{und} \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \cdot M}{r^n}$$

BWS $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r$

□

Def Eine GANZE Funktion ist eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}) \cong \left\{ a = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]] \mid \begin{array}{l} \text{der Konvergenzradius} \\ \text{von } a \text{ ist } +\infty \end{array} \right\}$$

Beispiel Polynome, $\exp$, $\sin$, $\cos$ sind ganz.

$\frac{1}{z}$ ist nicht ganz.

Satz (Liouville) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. f beschränkt (d.h. $\sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$)
 $\Rightarrow f$ ist konstant.

Beweis Die Potenzreihenentwicklung von f in 0 gilt
auf $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

$$C = \sup_{\mathbb{C}} |f|, \quad \forall r > 0 \quad M(r) = \sup_{\partial B_r(0)} |f|. \quad M(r) \leq C$$

$$\forall n \geq 0 \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{C}{r^n}.$$

$$n \geq 1, \quad r \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n = 0. \quad \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = a_0.$$

□

Satz $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\sup_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f < +\infty \Rightarrow f$ ist konstant.

BWS $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$
 $z \mapsto e^{f(z)}$

$$|g(z)| = |e^{\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$$

$$C = \sup_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f < +\infty \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re} f(z) \leq C \Rightarrow |g(z)| \leq e^C.$$

Liouville $\mathbb{C}$ g is konstant: $\forall z \in \mathbb{C} \quad g(z) = e^{a+ib}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$e^{f(z)} = g(z) = e^{a+ib} \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) \in \underbrace{\{a + i(b + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{diskret}}$$

$\mathbb{C}$ zusammenhängend $\Rightarrow$ f stetig $f(\mathbb{C})$ zusammenhängend

Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von einem diskreten top. Raum sind die Punkte $\Rightarrow f(\mathbb{C})$ hat ein Element. $\square$

Satz $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\sup_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f < +\infty$ oder $\inf_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f > -\infty$ oder $\sup_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} f < +\infty$ oder $\inf_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} f > -\infty$

$\Rightarrow f$ konstant

Fundamentalsatz der Algebra Jedes Polynom von einem Grade ≥ 1 hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Bws $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad f(z) = a_n z^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad |f(z)| = |a_n| \cdot |z|^n \cdot \left| 1 + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |a_n| |z|^n \cdot \underbrace{\left(1 - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)}_{\substack{\downarrow \text{ wenn} \\ 1 \quad |z| \rightarrow +\infty}}$$

$$\Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists R: \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R, |f(z)| \geq M.$$

$$M=1 \Rightarrow \exists R: \forall z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0), |f(z)| \geq 1.$$

For a contradiction let's assume that f doesn't have any zero in $\mathbb{C}$. So we can consider the function $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$

$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0) \quad |g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq 1.$$

$\overline{B_R(0)}$ kompakt & g stetig $\Rightarrow g|_{\overline{B_R(0)}}$ beschränkt

} g ist beschränkt

Liouville
 $\Rightarrow g$ konstant $\Rightarrow f$ konstant $\Downarrow \square$