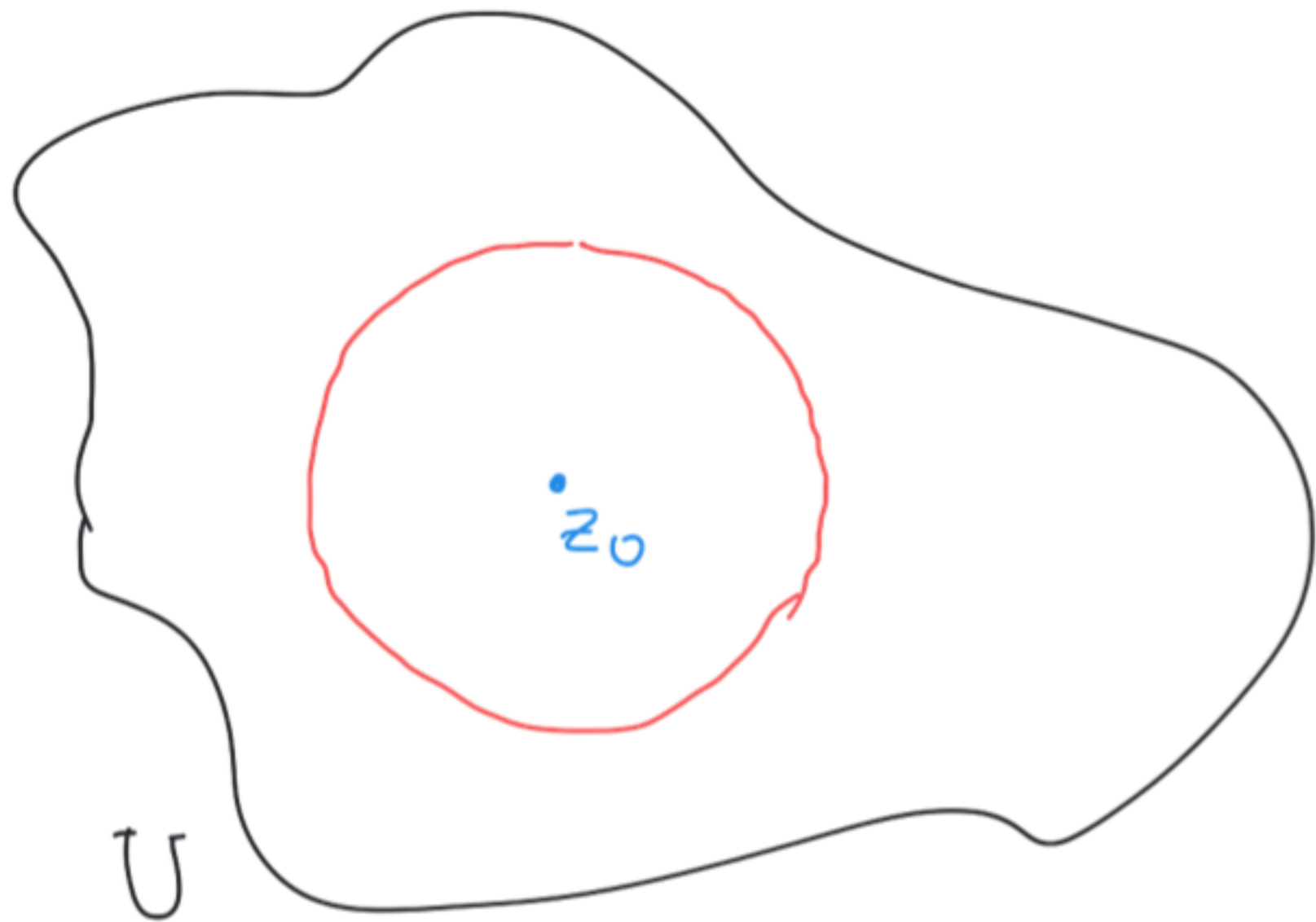


Def $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

f erfüllt die MITTELWERTEIGENSCHAFT, wenn

$\forall z_0 \in U, \forall r > 0$ mit

$$\overline{B_r(z_0)} \subset U,$$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Bem f hat MWE $\Leftrightarrow \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ haben MWE

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f$ hat MWE

Bws $z_0 \in U, r > 0, \overline{B_r(z_0)} \subset U$

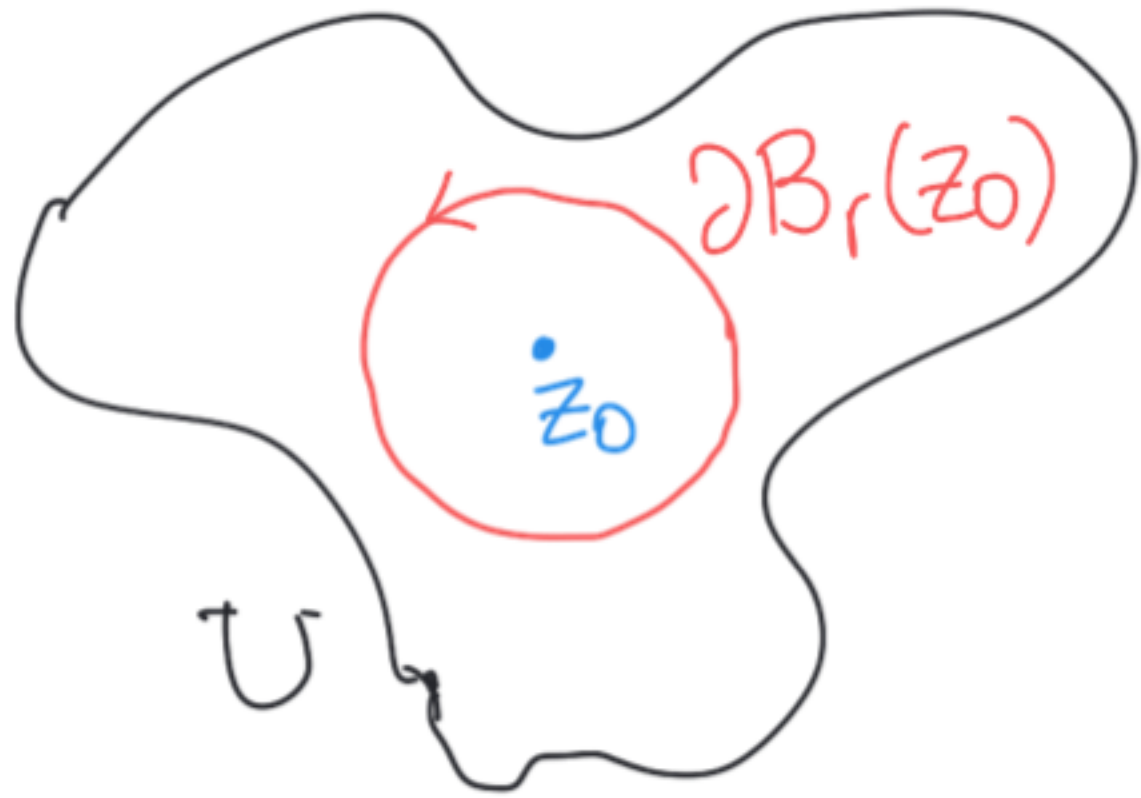
$$W(\partial B_r(z_0), z_0) = 1$$

Cauchysche Integralformel $\Rightarrow$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 + re^{it}) - z_0} r e^{it} i dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad \square$$



Satz (Cauchysche Abschätzung) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen,

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit MWE

$z_0 \in U$, $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset U$

$$\Rightarrow |f(z_0)| \leq \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$$



Bws $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq$$

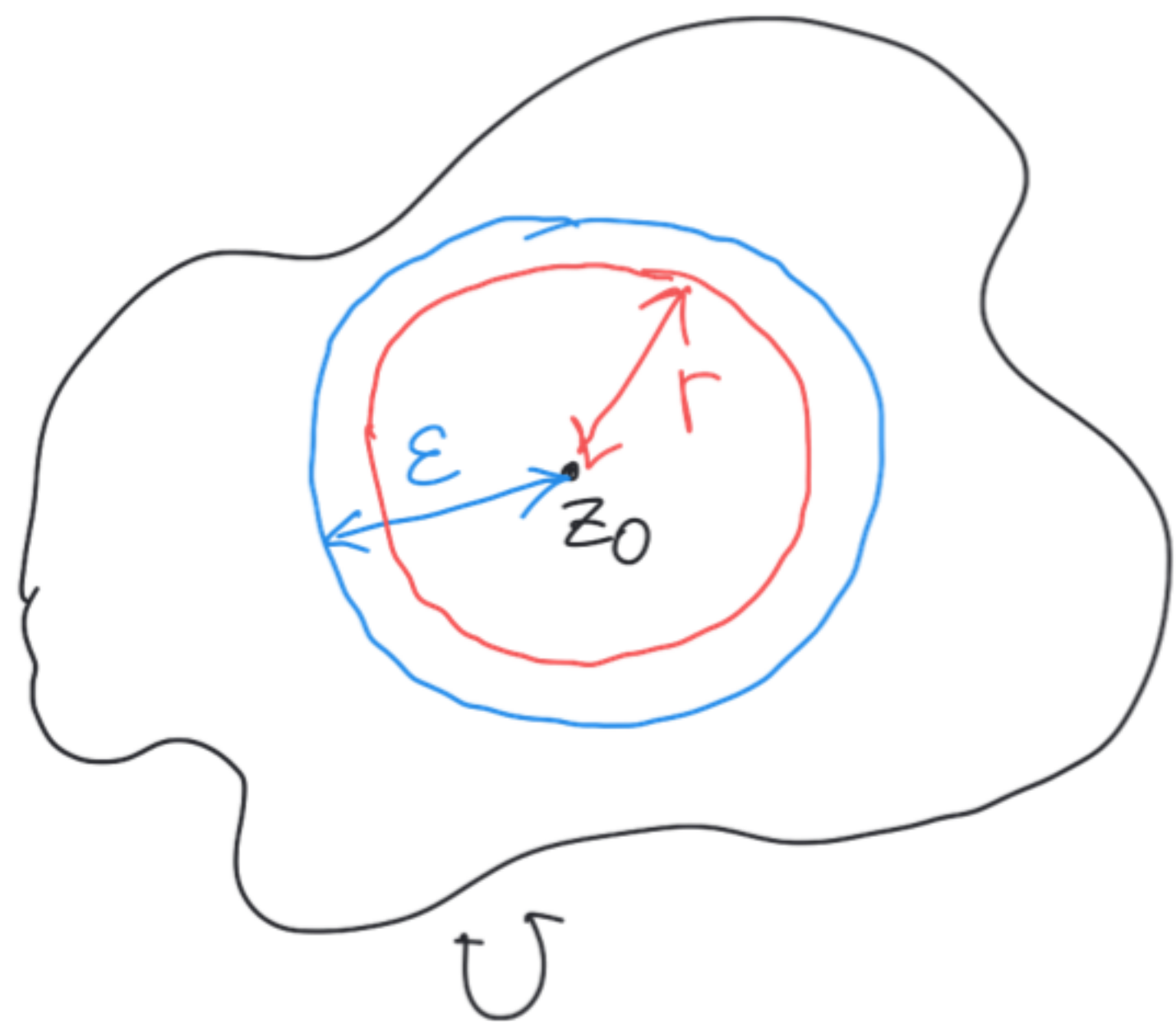
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{\partial B_r(z_0)} |f| dt = \max_{\partial B_r(z_0)} |f|. \quad \square$$

Satz (Maximumprinzip) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$.

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit MWE.

$\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$ und $\forall z \in B_\varepsilon(z_0), |f(z)| \leq |f(z_0)|$

$\Rightarrow \forall z \in B_\varepsilon(z_0), f(z) = f(z_0)$.



Bws Sei $w \in S^1$ s.d. $f(z_0) = |f(z_0)| \cdot w$.

$|f(z_0)| = f(z_0) \cdot \bar{w}$ ist reell.

$0 < r < \varepsilon$ beliebig

MWE auf $\partial B_r(z_0) \Rightarrow$

$$|f(z_0)| = f(z_0) \cdot \overline{w} \stackrel{\text{MWE für } f \cdot \overline{w}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \overline{w} dt \stackrel{\text{es ist in } \mathbb{R}_{\geq 0}}{=}$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \overline{w} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \stackrel{\text{Hypothesis}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|.$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \quad \left. \begin{array}{l} \forall t \in [0, 2\pi] \\ |f(z_0)| \geq |f(z_0 + re^{it})| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall t \in [0, 2\pi] \\ |f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)| \end{array}$$

Da r beliebig in $(0, \varepsilon)$ war,

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0), \quad |f(z)| = |f(z_0)|.$$

$|f|$ ist konstant
auf $B_\varepsilon(z_0)$

(*)

$$g: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \operatorname{Re}((f(z_0) - f(z)) \cdot \bar{w})$$

g hat MWE, ist stetig.

$$1) \forall z \in B_\varepsilon(z_0), \quad f(z_0) \cdot \bar{w} = |f(z_0)| \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re}(f(z_0) \cdot \bar{w}) = f(z_0) \cdot \bar{w} = |f(z_0)| \stackrel{(*)}{=} |f(z)| = |f(z) \cdot \bar{w}| \geq \operatorname{Re}(f(z) \cdot \bar{w})$$

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0), \quad g(z) \geq 0.$$

$$2) \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \quad f(z) = f(z_0) \iff g(z) = 0$$

$\Rightarrow$) trivial

$$\Leftarrow) z \in B_\varepsilon(z_0) \text{ mit } g(z) = 0. \quad (f(z_0) - f(z)) \bar{w} = ai \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

$$f(z) \bar{w} = \underbrace{f(z_0) \cdot \bar{w}}_{\substack{\parallel \\ |f(z_0)| \in \mathbb{R}}} - ai \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(z) \bar{w}|^2}_{\substack{\parallel \\ |f(z)|^2}} = \underbrace{|f(z_0) \bar{w}|^2}_{\substack{\parallel \\ |f(z_0)|^2}} + a^2$$

$|f(z)|^2 = |f(z_0)|^2 + a^2$. Aber $|f|$ ist konstant auf $B_\varepsilon(z_0)$, so
 $|f(z)| = |f(z_0)| \Rightarrow a=0$.

$$(f(z_0) - f(z))\bar{w} = ai = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z_0) - f(z) = 0 \quad \bar{w} \neq 0$$

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \operatorname{Re}((f(z_0) - f(z))\bar{w})$$

$$1) \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0), g(z) \geq 0$$

$$2) \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$$

$$g(z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = f(z_0)$$

g hat MWE $\Rightarrow 0 < r < \varepsilon$

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it}) dt \stackrel{1)}{\Rightarrow} \forall t \in [0, 2\pi] \quad g(z_0 + re^{it}) = 0$$

$$g|_{\partial B_r(z_0)} = 0. \quad r \text{ war beliebig} \Rightarrow g|_{B_\varepsilon(z_0)} = 0 \stackrel{2)}{=} \}$$

$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \quad f(z) = f(z_0)$. $|f|$ ist konstant
auf $B_\varepsilon(z_0)$. □

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, beschränkt.

$\bar{U}$ abgeschlossene Hülle von U in $\mathbb{C}$.

$f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f|_U$ erfüllt MWE.



$$1) \max_{\bar{U}} |f| = \max_{\bar{U} \setminus U} |f|$$

2) Wenn es $z_0 \in U$ mit $|f(z_0)| = \max_{\bar{U}} |f|$, dann ist

f konstant

$\left[\bar{U} \text{ und } \bar{U} \setminus U \right]$
[sind kompakt]

Bem Der Satz gilt nicht, wenn U nicht beschränkt ist.

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

$$\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

$$\overline{U} \setminus U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$$

$$f: \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \operatorname{Re} z$$

MWE

$$\sup_{\overline{U}} |f| = +\infty,$$

$$\sup_{\overline{U} \setminus U} |f| = 0$$

Bws U beschränkt $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overline{U} \text{ und } \overline{U} \setminus U \text{ beschränkt} \\ \overline{U}, \overline{U} \setminus U \text{ abgeschlossen in } \mathbb{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{U}, \overline{U} \setminus U \text{ kompakt.}$

$|f|: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$M = \max_{\overline{U} \setminus U} |f|, \quad M' = \max_{\overline{U}} |f| \Rightarrow 0 \leq M \leq M' < +\infty$$

$$\overline{U} \setminus U \subseteq \overline{U}$$

Man betrachte $A = \{z \in U \mid |f(z)| = M'\} = \{z \in U \mid |f(z)| \geq M'\}$

A ist abgeschlossen in U :

$$A = U \cap |f|^{-1}(M')$$

abgeschlossen in $\overline{U}$

$\{M'\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$

A ist offen in U : $z_0 \in A \Rightarrow \forall z \in U, |f(z)| \leq M' = |f(z_0)|$.

Man wähle $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$.

$\forall z \in B_\varepsilon(z_0), |f(z)| \leq |f(z_0)| \xRightarrow{\text{Maximumprinzip}} \forall z \in B_\varepsilon(z_0), f(z) = f(z_0)$

$\Rightarrow \forall z \in B_\varepsilon(z_0) |f(z)| = |f(z_0)| = M' \Rightarrow B_\varepsilon(z_0) \subseteq A$.

U zusammenhängend und A ist offen und abgeschlossen in U .

Es gibt zwei Möglichkeiten:

i) $A = \emptyset$. $\forall z \in U, |f(z)| < M' \Rightarrow$
 1) wird erfüllt
 2) findet nicht statt

ii) $A = U \Rightarrow \forall z \in U |f(z)| = M'$

Jeder Punkt von U ist ein lokaler Maximumpunkt für $|f|$

Maximumprinzip $\Rightarrow f|_U$ lokal konstant

U zusammenhängend $\Rightarrow f|_U$ konstant.

Stetigkeit von $f \Rightarrow f$ konstant.

1) und 2) werden erfüllt. $\square$