

Formale Laurentreihen

Sei K ein Körper (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$)

Eine FORMALE LAURENTREIHE mit Koeffizienten in K in einer Unbestimmten T ist $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ mit $a_n \in K$.

$\{\text{Laurentreihen}\}$ ist ein Vektorraum über K :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n T^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + b_n) T^n$$

$$\lambda \in K \quad \lambda \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda a_n T^n$$

$$K[T] \subseteq K[[T]] \subseteq \{\text{Laurentreihen}\}$$

{Laurentreihen} ist kein Ring:

man kann nicht die folgenden Produkte berechnen

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} T^n \right)^2$$

Der Koeffizient von T^0 ist
 $\dots + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} T^n \right) \cdot \left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} T^{-m} \right)$$

$\text{char } K = 0$.

Der Koeffizient von T^0 ist

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

Diese Reihe konvergiert in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def $K((T)) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Laurentreihen mit nur endlich viele} \\ \text{Terme mit Grad} < 0 \end{array} \right\}$

$$= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid \begin{array}{l} a_n \in K \\ \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n < N, a_n = 0 \end{array} \right\}$$

$$K[[T]] = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid \begin{array}{l} a_n \in K \\ \forall n < 0, a_n = 0 \end{array} \right\}$$

- $K((T))$ ist ein Ring
- $K[[T]] \subseteq K((T))$
- $K((T))$ ist der Quotientenkörper von $K[[T]]$

Def $\text{ord} : \{\text{Laurentreihen}\} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\text{ord}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n\right) := \begin{cases} +\infty & \text{wenn } \forall n \in \mathbb{Z}, a_n = 0 \\ -\infty & \text{wenn } \forall N \in \mathbb{Z}, \exists n < N : a_n \neq 0 \\ \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{ord}(a) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \iff a \in \mathbb{K}((T))$$

$$\text{ord}(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} \iff a \in \mathbb{K}[[T]]$$

$$\text{ord}(a) = +\infty \iff a = 0.$$

$$\text{ord}(a) \in \mathbb{Z}_{< 0} \iff a \in \mathbb{K}((T)) \setminus \mathbb{K}[[T]]$$

- $\text{ord}(a+b) \geq \min\{\text{ord}(a), \text{ord}(b)\}$
- $\text{ord}(a) < \text{ord}(b) \Rightarrow \text{ord}(a+b) = \text{ord}(a)$
- $a, b \in K((T)) \Rightarrow \text{ord}(a \cdot b) = \text{ord}(a) + \text{ord}(b)$
- $\text{ord}(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 \neq 0 \\ \forall n < 0, a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in K[[T]] \text{ und} \\ a \text{ hat ein multiplikatives} \\ \text{Inverse in } K[[T]]. \end{array} \right.$
- $\text{ord}(a) = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k \neq 0 \\ \forall n < k, a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists b \text{ mit } \text{ord}(b) = 0 : \\ a = T^k \cdot b \end{array}$

Wenn $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ eine formale Laurentreihe mit Koeffizienten in einem Körper K ist, definiert man

$$a_+ := \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in K[[T]]$$

$$a_- := \sum_{n < 0} a_n T^n$$

- $a = a_+ + a_-$

- a_- ist eine formale Potenzreihe in der Unbestimmten T^{-1}

Konvergenz für Laurentreihen Von jetzt an $K = \mathbb{C}$.

Eine formale Laurentreihe $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ hat zwei

Konvergenzradien:

$$R_+ := \begin{array}{l} \text{Konvergenzradius} \\ \text{von } a_+ = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \end{array} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R_- := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \begin{array}{l} \text{Konvergenzradius von} \\ a_- = \sum_{k > 0} a_{-k} (T^{-1})^k \\ \text{in der Unbestimmten } T^{-1} \end{array}$$

Beispiele • $\sum_{n \in \mathbb{Z}} T^n$ $R^+ = R^- = 1$

• $a \in \mathbb{C}((T)) \Rightarrow R^- = 0$

• $\sum_{n \leq 0} \frac{1}{(-n)!} T^n$ $R^+ = +\infty, R^- = 0$

• $\sum_{n < 0} 3^{-n} T^n + \sum_{n \geq 0} T^n$ $R^+ = 1, R^- = 3$

• $\sum_{n < 0} T^{-n} + \sum_{n \geq 0} 3^{-n} T^n$ $R^+ = 3, R^- = 1$

Sei $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ eine formale Laurentreihe mit Radien R^+ und R^-

• $|z| < R^+ \Rightarrow a_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut

• $|z| > R^- \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{R^-} \Rightarrow a_-(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z} \right)^k$

Konvergenzradius
von a_- mit
Unbestimmten T^{-1} konvergiert absolut

Satz Sei $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ eine formale Laurentreihe mit Radien R^- und R^+ .

Wenn $R^- < +\infty$, dann ist die Abbildung

$$a_- : \mathbb{C} \setminus \overline{B_{R^-}(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R^-\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto a_-(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n$$

holomorph und

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{R^-}(0)} \quad (a_-)'(z) = \sum_{n < 0} a_n n z^{n-1}$$

BWS $g : \underset{R^-}{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{C}$

$$w \longmapsto \sum_{k > 0} a_{-k} w^k$$

ist holomorph.

$$\varphi: \mathbb{C} \setminus \overline{B_{R^-}(0)} \longrightarrow B_{\frac{1}{R^-}}(0) \setminus \{0\}$$

Biholomorphismus.

$$z \longmapsto z^{-1}$$

$$a_- = g \circ \varphi: \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{R^-}(0)}$$

$$(g \circ \varphi)(z) = g(z^{-1}) = \sum_{k>0} a_{-k} (z^{-1})^k = \sum_{k>0} a_{-k} z^{-k} = \sum_{n<0} a_n z^n = a_-(z)$$

$\Rightarrow a_-$ ist holomorph.

$$(a_-)'(z) = (g \circ \varphi)'(z) = g'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) = \sum_{k>0} a_{-k} k \cdot \varphi(z)^{k-1} \varphi'(z) =$$

$$= \sum_{k>0} a_{-k} k (z^{-1})^{k-1} (-z^{-2}) = \sum_{k>0} a_{-k} \cdot (-k) z^{-k-1}$$

$$= \sum_{n<0} a_n n z^{n-1}. \quad \square$$

Satz Sei $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ eine formale Laurentreihe mit
Radien $R^+(a)$ und $R^-(a)$.

Wenn $R^-(a) < R^+(a)$, dann ist die Abbildung

$$\{z \in \mathbb{C} \mid R^-(a) < |z| < R^+(a)\} \xrightarrow{z} \mathbb{C} \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^{-k}$$

holomorph und ihre Ableitung ist die durch
 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n T^{n-1}$ induzierte Abbildung.

Bws $a = a_+ + a_-$. $\square$