

Def Ein KREISRING (annulus) ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}$

$$A_{r^-, r^+}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r^- < |z - z_0| < r^+ \}$$

mit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r^- < r^+ \leq +\infty$.

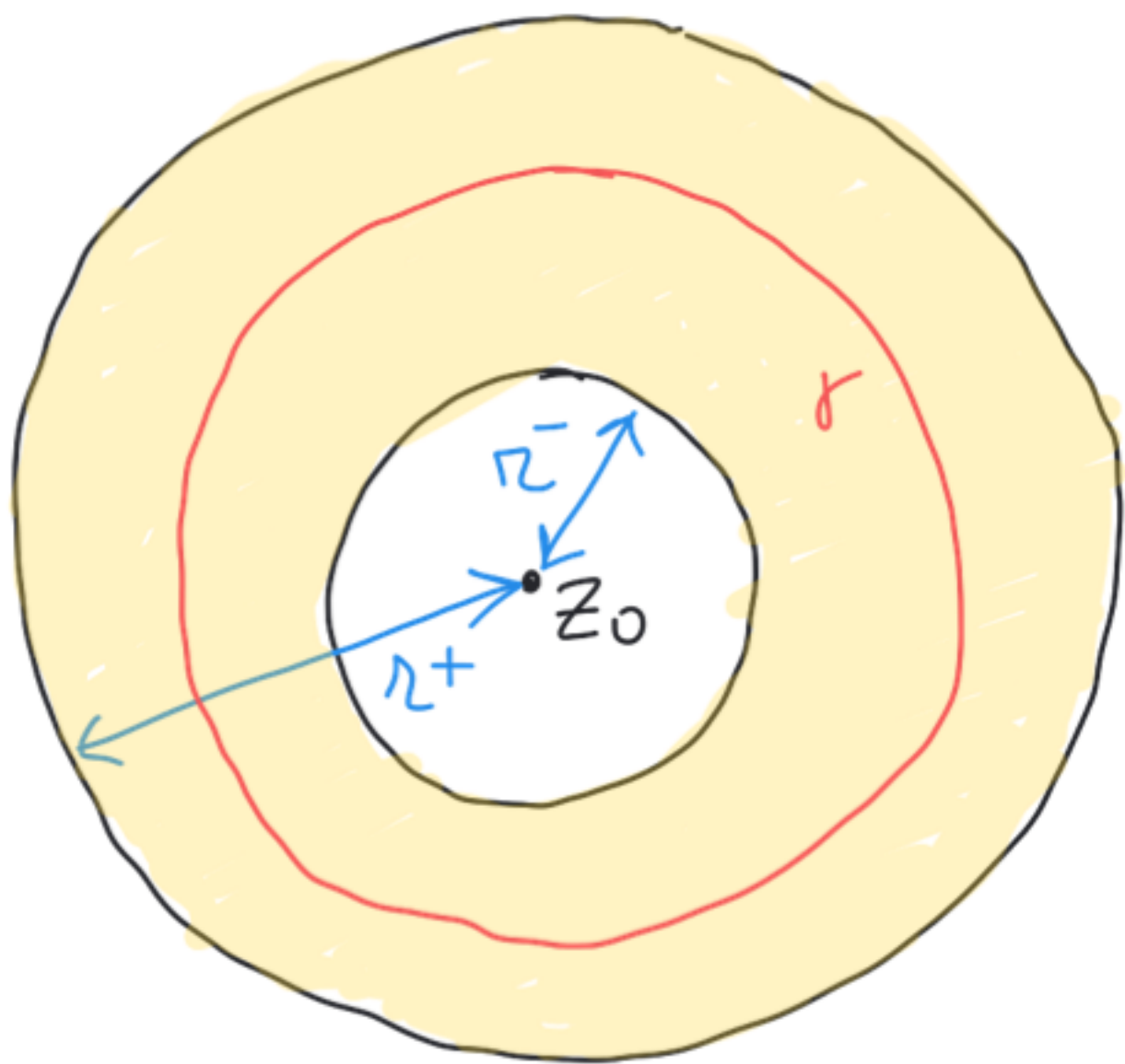
Beispiele: $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = A_{0, r}(z_0)$, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} = A_{0, +\infty}(z_0)$
"punktierte Kreisscheibe"

Jede holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe hat eine (eindeutige) Potenzreihenentwicklung.

Jede holomorphe Funktion auf einem Kreisring hat eine (eindeutige) Laurent(reihen)entwicklung

Satz $0 \leq r^- < r^+ \leq +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $A = A_{r^-, r^+}(z_0)$, $f \in \mathcal{O}(A)$.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad r \in (r^-, r^+)$$



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

(a_n hängt nicht von $r \in (r^-, r^+)$ ab).

$\Rightarrow$ die Laurentreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ hat $R^- \leq r^-$ und $R^+ \geq r^+$

und $\forall z \in A$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$.

Kor $0 \leq r^- < r^+ \leq +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $A = A_{r^-, r^+}(z_0)$.

$$\left\{ \text{a Laurentreihe} \mid \begin{array}{l} R^+(a) \geq r^+ \\ R^-(a) \leq r^- \end{array} \right\} \longrightarrow \mathcal{O}(A)$$

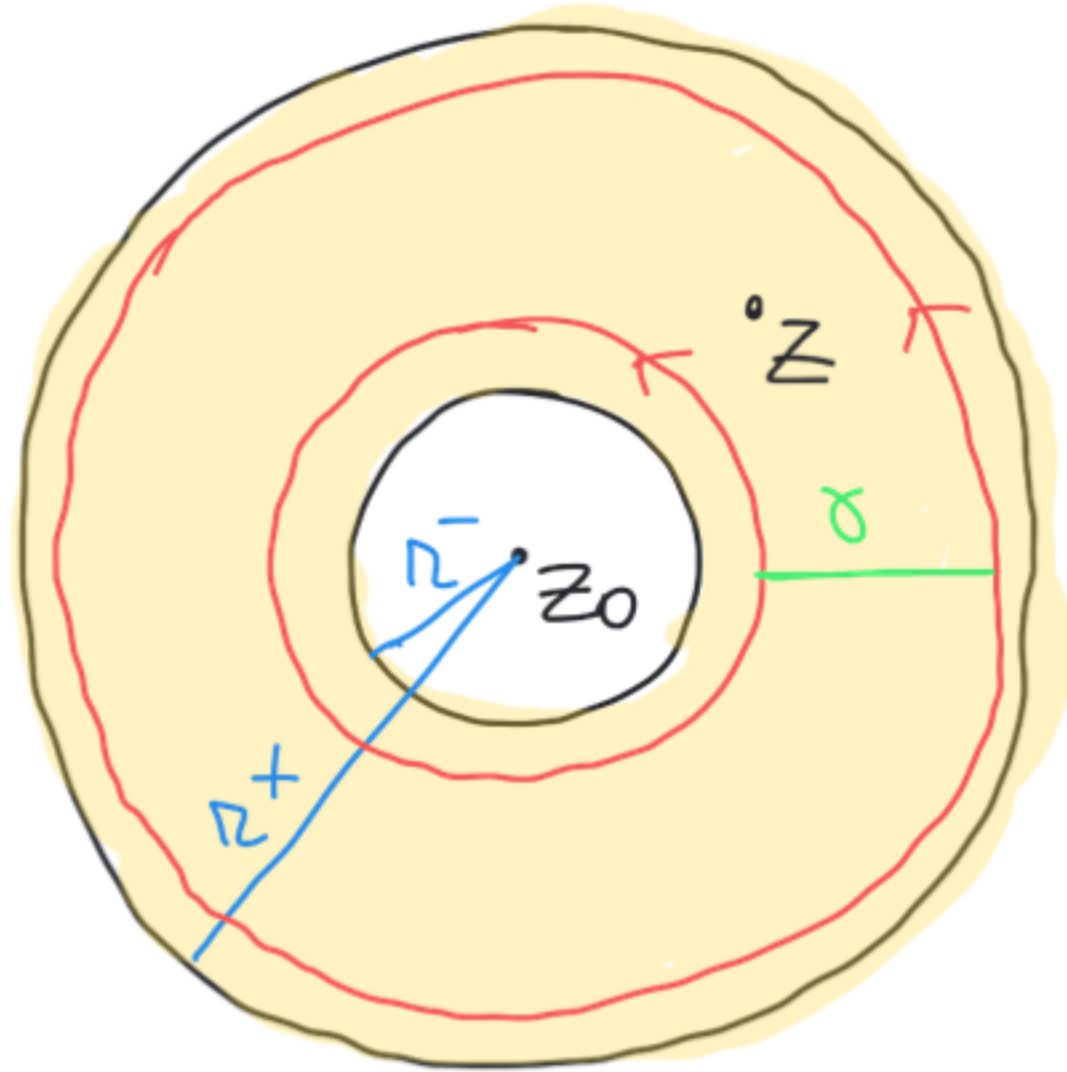
$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$$

$\longmapsto$

$$\left(\begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \end{array} \right)$$

ist ein Ringisomorphismus.

Beweis (Laurententwicklung) $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r^- < r^+ \leq +\infty$,
 $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r^- < |z - z_0| < r^+\}$, $f \in \mathcal{O}(A)$.



$\forall r \in (r^-, r^+)$ beliebig, $M(r) := \max_{\partial B_r(z_0)} |f|$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

$$\Rightarrow R^-(a) \leq r^-, R^+(a) \geq r^+.$$

$$r^- < \rho^- < \rho^+ < r^+$$

$$\gamma: [\rho^-, \rho^+] \rightarrow A$$

$$t \mapsto z_0 + t$$

$\gamma * \partial B_{\rho^+}(z_0) * \iota(\gamma) * \iota(\partial B_{\rho^-}(z_0))$
 ist nullhomolog in A .



Cauchysche Integralformel $\Rightarrow$

Wenn $\rho^- < |z - z_0| < \rho^+$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma * \partial B_{\rho^+}(z_0) * \iota(\gamma) * \partial B_{\rho^-}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^+}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^-}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\zeta \in \partial B_{\rho^+}(z_0) : |\zeta - z_0| = \rho^+ \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho^+} < 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^+}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^+}(z_0)} \sum_{n \geq 0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \int_{\partial B_{\rho^+}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

$$\zeta \in \partial B_{\rho^-}(z_0) \Rightarrow |\zeta - z_0| = \rho^- \Rightarrow \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{\rho^-}{|z - z_0|} < 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = - \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = - \frac{1}{z - z_0} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \\
&= - \sum_{k \geq 0} (\zeta - z_0)^k (z - z_0)^{-k-1}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^-}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^-}(z_0)} f(\zeta) \cdot \left(-\sum_{k \geq 0} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} \right) d\zeta$$

$$= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^-}(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \stackrel{n = -k-1}{=}$$

$$= \sum_{n < 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho^-}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \cdot (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n.$$

$$r^- < \rho^- < \rho^+ < r^+$$

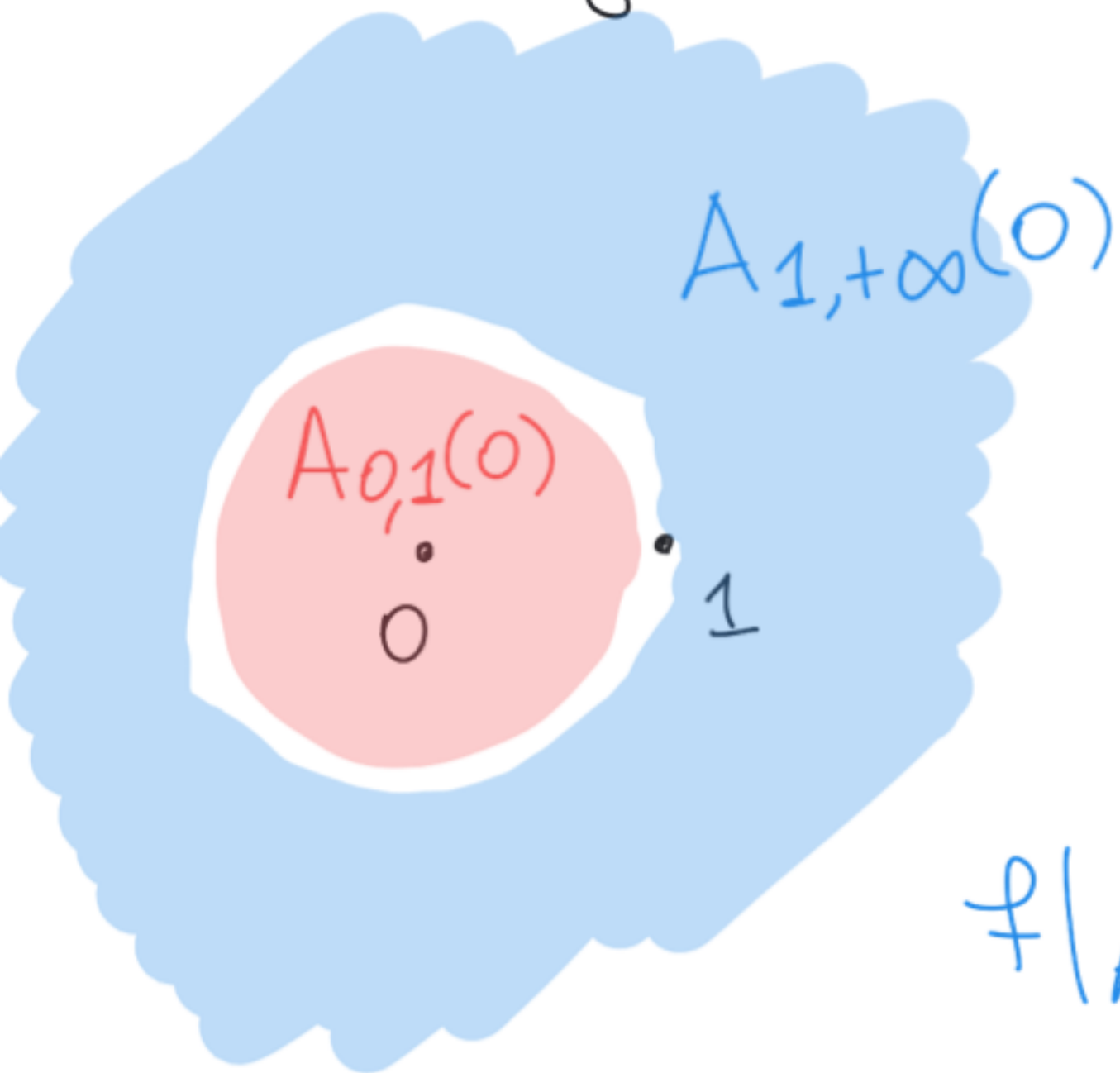
$$\rho^- < |z - z_0| < \rho^+ \Rightarrow f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

$$\rho^-, \rho^+ \text{ beliebig} \Rightarrow \forall z \in A, \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n. \quad \square$$

Bemerkung Die Laurententwicklung hängt vom Kreisring ab!

$f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{1}{1-z}$

$A_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$
 $A_{1,+\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$



$f|_{A_{0,1}(0)}: 0 < |z| < 1 \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$$

$f|_{A_{1,+\infty}(0)}: |z| > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^k} = -\sum_{k \geq 0} z^{-k-1}$$

Satz $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r^- < r^+ \leq +\infty$, $A = A_{r^-, r^+}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r^- < |z - z_0| < r^+\}$
 $f \in \mathcal{O}(A)$ mit Laurententwicklung $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$
 γ Schleife in A

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot W(\gamma, z_0) \cdot a_{-1}$$

Bws $r^- < r < r^+$
 γ ist homolog zu $W(\gamma, z_0)$ mal $\partial B_r(z_0)$ in A

$$\text{Goursat} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz \text{ lokal exakt} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = W(\gamma, z_0) \cdot \int_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz$$

$$= W(\gamma, z_0) \cdot 2\pi i \cdot a_{-1} \cdot \square$$