

Isolierte Singularitäten

$z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $A_{0,r}(z_0) = B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$

$f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ mit Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Es gibt 3 Möglichkeiten:

- $\forall n < 0, a_n = 0$ (d.h. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$)
 $\text{ord}(a) \geq 0$ HEBBAR
removable
- $\exists N < 0 : a_N \neq 0$ und $\forall n < N, a_n = 0$ $-\infty < \text{ord}(a) < 0$ POL
pole
(d.h. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathbb{C}((T)) \setminus \mathbb{C}[[T]]$)
- $\{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$ ist unendlich $\text{ord}(a) = -\infty$ WESENTLICH
essential
(d.h. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \notin \mathbb{C}((T))$)

Satz $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) f hat eine hebbare Singularität in z_0
- ii) $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$ s.d. $\tilde{f}|_{B_r(z_0) \setminus \{z_0\}} = f$
- iii) $\exists \tilde{f}: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig s.d. $\tilde{f}|_{B_r(z_0) \setminus \{z_0\}} = f$
- iv) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert in $\mathbb{C}$
- v) $\forall \varepsilon \in (0, r), \sup_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}} |f| < +\infty$
- vi) $\exists \varepsilon \in (0, r) \sup_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}} |f| < +\infty$

BWS ii $\Rightarrow$ iii, iii $\Leftrightarrow$ iv, v $\Rightarrow$ vi : trivial.

$$i \Rightarrow ii: \quad \forall z \in B_n(z_0) \setminus \{z_0\} \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_n(z_0). \quad \tilde{f} \in \mathcal{O}(B_n(z_0)).$$

$$\tilde{f}|_{B_n(z_0) \setminus \{z_0\}} = f.$$

$$iii \Rightarrow v: \quad \tilde{f}: B_n(z_0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig. } 0 < \varepsilon < r.$$

$$\sup_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}} |f| \leq \frac{\max_{B_\varepsilon(z_0)} |\tilde{f}|}{1} < +\infty.$$

$$vi \Rightarrow i: \quad M = \sup_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}} |f| < +\infty.$$

$$n < 0. \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad 0 < \rho < \varepsilon$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi \rho = \frac{M}{\rho^n} = M \rho^{-n} \Rightarrow |a_n| \leq \inf_{0 < \rho < \varepsilon} M \rho^{-n} = 0 \quad \square$$

Satz (Pol) $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$. Dann:
 f hat einen Pol in $z_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

BWS $\Rightarrow$) $N < 0$ $f(z) = \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^n$, $a_N \neq 0$.

$g(z) = \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^{n-N}$ holomorph auf $B_r(z_0)$

$$\forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \quad f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{-N}} \quad -N > 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = a_N \neq 0$$

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^{-N}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

$\Leftarrow$) Warten! $\square$

Bemerkung $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $g \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$, $\text{ord}_{z_0}(g) \neq +\infty$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n T^n \neq 0.$$

$$z \mapsto \frac{1}{g(z)}$$

$\{z \in B_r(z_0) \mid g(z) = 0\}$ diskret!

Man kann $\varepsilon > 0$ finden, s.d. $B_\varepsilon(z_0) \cap \{z \in B_r(z_0) \mid g(z) = 0\} \subseteq \{z_0\}$

$$B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{g(z)}$$

$$k = \text{ord}_{z_0}(g) \quad g(z) = (z - z_0)^k \cdot h(z) \quad h(z_0) \neq 0, h \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$$

$$\frac{1}{h(z)} \text{ ist holomorph in } B_\varepsilon(z_0). \quad \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

Bemerkung $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $g \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$

$$k = \text{ord}_{z_0}(g) < +\infty$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon \in (0, r)$ s.d. $\frac{1}{g(z)}$ ist eine holomorphe Funktion
auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, und $\text{ord}_{z_0}\left(\frac{1}{g(z)}\right) = -k$.

D.h.:

• $k=0 \Rightarrow g(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ ist holomorph auf $B_\varepsilon(z_0)$

• $k > 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ hat einen Pol in z_0

$\frac{1}{g(z)}$ hat nicht eine wesentliche Singularität

Satz (Casorati-Weierstrass) $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$.
 f hat eine wesentliche Singularität in z_0 $\iff \forall \varepsilon > 0, f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ ist dicht in $\mathbb{C}$.

BWS $\Leftarrow$) f kann nicht eine hebbare Singularität in z_0 haben
 f kann nicht einen Pol in z_0 haben.

$\Rightarrow$) [Ähnlich zu Aufgabe 7.2.c]
By contradiction man kann $\varepsilon \in (0, r)$ finden, s.d.
 $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ in $\mathbb{C}$ nicht dicht ist.

$\exists a \in \mathbb{C}, R > 0 : f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap B_R(a) = \emptyset$.

$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \quad |f(z) - a| \geq R$.

$$g: B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{f(z) - a}$$

holomorph

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}, \quad |g(z)| < \frac{1}{R}.$$

g ist beschränkt auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$.

$\Rightarrow g$ hat eine hebbare Singularität in z_0 :

$$\exists \tilde{g} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(z_0)) : \tilde{g}|_{B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}} = g.$$

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \quad f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)} + a$$

Bemerkung $\Rightarrow \frac{1}{\tilde{g}(z)}$ hat eine
hebbare Singularität oder einen
Pol

$\Rightarrow f$ hat nicht eine wesentliche Singularität in z_0 $\Downarrow$ $\square$

$$\underline{\text{BWS (Pol)}} \iff f \in \mathcal{O}(B_2(z_0) \setminus \{z_0\})$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

$$\exists \varepsilon \in (0, 2) : \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}, \quad |f(z)| > 1$$

$$f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap B_1(0)$$

$f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$.

f hat nicht eine wesentliche Singularität.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \text{ existiert nicht in } \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existiert nicht in } \mathbb{C} \Rightarrow f \text{ hat nicht eine hebbare Singularität } \square$$