

Meromorphe Funktionen

Def Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine MEROMORPHE FUNKTION auf U ist eine Abbildung

$$f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \text{sodass:}$$

- $f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen in U
- $f^{-1}(\infty)$ ist diskret
- $f|_{U \setminus f^{-1}(\infty)}: U \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph
- jeder Punkt von $f^{-1}(\infty)$ ist ein Pol von $f|_{U \setminus f^{-1}(\infty)}$

$$\mathcal{M}(U) := \{ \text{meromorphe Funktionen auf } U \}$$

Beispiele • $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{M}(U)$
 Jede holomorphe Funktion ist meromorph.

• $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}^*$ $\Rightarrow$ ist meromorph auf $\mathbb{C}^*$

$\{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$

$\{0\}$ diskrete

$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ hat einen Pol in 0
 $z \mapsto \frac{1}{z}$

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{wenn } z \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$

ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

• $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}^*$.
 $z \mapsto \exp(z^{-1})$

0 ist eine wesentliche Singularität

$\Rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
 $z \mapsto \begin{cases} \exp(z^{-1}) & \text{wenn } z \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$

ist nicht meromorph

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{M}(U)$

$\text{ord}_{z_0}(f) := \text{ord}$ (Laurententwicklung von f in einer punktierten Umgebung von z_0)

- $\text{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ [wesentliche Singularitäten sind nicht erlaubt]
- $\text{ord}_{z_0}(f) = +\infty \iff f$ ist null in einer Umgebung von z_0
- $\text{ord}_{z_0}(f) \geq 0 \iff f(z_0) \neq \infty \iff f$ ist holomorph in einer Umgebung von z_0
- $\text{ord}_{z_0}(f) < 0 \iff f(z_0) = \infty \iff f$ hat einen Pol in z_0
- $\text{ord}_{z_0}(f) = 0 \iff \begin{matrix} f(z_0) \neq \infty \\ f(z_0) \neq 0 \end{matrix} \iff f$ ist holomorph und $\neq 0$ in einer Umgebung von z_0

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $\Rightarrow \mathcal{M}(U)$ ist ein Ring.

Summe: $f, g \in \mathcal{M}(U)$. Man definiere $f+g: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
wie: $z \in U$

- $f(z) \neq \infty, g(z) \neq \infty \Rightarrow (f+g)(z) := f(z) + g(z)$
- $f(z) = \infty, g(z) \neq \infty \Rightarrow (f+g)(z) := \infty$
- $f(z) \neq \infty, g(z) = \infty \Rightarrow (f+g)(z) := \infty$
- $f(z) = g(z) = \infty \Rightarrow$ verschiedene Möglichkeiten; man braucht, die Laurententwicklung von f und g zu bestimmen.

Produkt: $f, g \in \mathcal{M}(U)$. Man definiere $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- $f(z) \neq \infty, g(z) \neq \infty \Rightarrow (f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$
- $(f(z) \neq 0, g(z) = \infty)$ oder $(f(z) = \infty, g(z) \neq 0) \Rightarrow (f \cdot g)(z) := \infty$
- $(f(z) = 0, g(z) = \infty)$ oder $(f(z) = \infty, g(z) = 0) \Rightarrow$ verschiedene Möglichkeiten. Bestimmen Sie die Laurententwicklungen!

Beispiel $f, g, h, k \in M(\mathbb{C})$

$$f(z) = z^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C}^* \\ \infty & z = 0 \end{cases}$$

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} & z \in \mathbb{C}^* \\ \infty & z = 0 \end{cases}$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^3} & z \in \mathbb{C}^* \\ \infty & z = 0 \end{cases}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = z^2 \cdot \frac{1}{z} = z$$

$f \cdot g$ hat eine hebbare Singularität in 0 mit $\text{ord} = 1$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(0) = 0.$$

$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (f \cdot h)(z) = 1$. $f \cdot h$ hat eine hebbare Singularität in 0 mit $\text{ord} = 0 \Rightarrow (f \cdot h)(0) = 1$.

$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (f \cdot k)(z) = \frac{1}{z}$. $f \cdot k$ hat einen Pol in 0

$$\Rightarrow (f \cdot k)(0) = \infty.$$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $\Rightarrow$ die Inklusionsabbildung
 $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{M}(U)$ ist ein Ringhomomorphismus.

BWS trivial!

Bem $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(U)$, $g \in \mathcal{M}(U)$, $z_0 \in U$

- $\text{ord}_{z_0}(f) \neq +\infty, \text{ord}_{z_0}(g) \neq +\infty \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{ord}_{z_0}(f \cdot g) = \text{ord}_{z_0}(f) + \text{ord}_{z_0}(g)$
- $\text{ord}_{z_0}(f + g) \geq \min \{ \text{ord}_{z_0}(f), \text{ord}_{z_0}(g) \}$
- $\text{ord}_{z_0}(f) < \text{ord}_{z_0}(g) \Rightarrow \text{ord}_{z_0}(f + g) = \text{ord}_{z_0}(f)$

Lemma $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(U)$, $z_0 \in U$, $\text{ord}_{z_0}(f) < +\infty$.
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ und $g: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph mit
 $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$ und
 $\forall z \in B_\varepsilon(z_0), \quad f(z) = (z - z_0)^{\text{ord}_{z_0}(f)} \cdot g(z)$

Bws [Sehen Sie die Bemerkung vor Casorati-Weierstrass]
 $f^{-1}(\infty)$ diskret $\Rightarrow \exists r > 0: B_r(z_0) \subseteq U$, $f^{-1}(\infty) \cap B_r(z_0) = \{z_0\}$
 und abgeschlossen in U
 Laurententwicklung von $f|_{B_r(z_0) \setminus \{z_0\}} \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^n, \quad N = \text{ord}_{z_0}(f) \quad a_N \neq 0$$

$$g(z) = \sum_{n \geq N} a_n (z - z_0)^{n-N} = a_N + a_{N+1}z + \dots \quad g \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$$

$$a_N = g(z_0) \neq 0. \quad f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z). \quad \square$$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend
 $\Rightarrow M(U)$ ist ein Körper

Bws Sei $f \in M(U) \setminus \{0\}$
 $\Rightarrow f|_{U \setminus f^{-1}(\infty)} \in \mathcal{O}(U) \setminus \{0\}$, $U \setminus f^{-1}(\infty)$ zusammenhängend

$\Rightarrow f^{-1}(0)$ ist diskret.

Man definiert: $h: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{wenn } f(z) \neq 0, \infty \\ \infty & \text{wenn } f(z) = 0 \\ 0 & \text{wenn } f(z) = \infty \end{cases}$$

$h^{-1}(\infty) = f^{-1}(0)$ diskret.

$h^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen in U : $z_n \rightarrow z_*$ in U , $z_n \in h^{-1}(\infty)$

$$h(z_n) = \infty \Rightarrow f(z_n) = 0 \quad \forall n.$$

z_* ist kein Pol von f : wenn z_* ein Pol von f wäre, dann
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(z_n)| = +\infty$, aber $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(z_n)| = 0$.

$$\Rightarrow z_* \notin f^{-1}(\infty).$$

$$\text{Stetigkeit von } f|_{U \setminus f^{-1}(\infty)} \Rightarrow f(z_*) = 0 \Rightarrow z_* \in h^{-1}(\infty).$$

It remains to show that $h|_{U \setminus h^{-1}(\infty)} \in \mathcal{O}(U \setminus h^{-1}(\infty))$ and that every point of $h^{-1}(\infty)$ is a pole for $h|_{U \setminus h^{-1}(\infty)}$. All of these are local properties, so we can check them on small neighbourhoods as follows.

$$\text{Sei } z_0 \in U. \quad N = \text{ord}_{z_0}(f). \quad f \neq 0 \Rightarrow N \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Lemma} \Rightarrow 0 < \varepsilon, \quad B_\varepsilon(z_0) \subseteq U, \quad g: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ hol.}$$

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \quad f(z) = (z - z_0)^N g(z).$$

So: $\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ $h(z) = (z - z_0)^{-N} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(z)}}_{\text{holomorph. in } B_\varepsilon(z_0), \text{ immer } \neq 0}$

$N > 0 \Rightarrow f(z_0) = 0$
 $h(z_0) = \infty$, h hat einen Pol in z_0 .

$N = 0 \Rightarrow f = g, h = g^{-1}$
 $N < 0 \Rightarrow \begin{matrix} f(z_0) = \infty \\ h(z_0) = 0 \end{matrix}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} f(z_0) = \infty \\ h(z_0) = 0 \end{matrix}} \right] h \text{ ist holomorph in einer Umgebung von } z_0.$

$\Rightarrow h \in \mathcal{M}(U), \quad f \cdot h = 1. \quad \square$

Bem $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend

$\mathcal{O}(U)$ ist ein Integritätsring

$\mathcal{M}(U)$ ist ein Körper

$\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{M}(U) \Rightarrow \mathcal{M}(U)$ enthält die Quotientenkörper von $\mathcal{O}(U)$.

┌ Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend
 $\Rightarrow \mathcal{M}(U)$ ist die Quotientenkörper von $\mathcal{O}(U)$.

Wir können nicht hier das beweisen ┘

$$\begin{array}{l} f, g \in \mathcal{O}(U) \\ g \neq 0 \end{array} \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{M}(U)$$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(U)$

$\Rightarrow f' \in \mathcal{M}(U)$ und $\forall z_0 \in U$, $\text{ord}_{z_0}(f') = \text{ord}_{z_0}(f) - 1$
mit $\text{ord}_{z_0}(f) \neq 0$

BWS $z_0 \in U$. $k = \text{ord}_{z_0}(f)$.

Wenn $k = +\infty$, dann $f = 0$. So $f' = 0$.

Wenn $k \in \mathbb{Z}$, $\{0\}$ Lemma $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ und $g: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph mit

$B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$ und $\forall z \in B_\varepsilon(z_0)$, $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Dann $\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, $f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)$
 $= (z - z_0)^{k-1} \cdot [k \cdot g(z) + (z - z_0) \cdot g'(z)]$

So $f'(z) = (z - z_0)^{k-1} h(z)$ und $h(z_0) = k \cdot g(z_0) \neq 0$
 $=: h(z)$

$\Rightarrow \text{ord}_{z_0}(f') = k - 1$. $\square$

Wenn $k = 0$ gibt es viele Möglichkeiten.