

Def $U \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmenge, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$.

Man betrachte die Laurententwicklung von f in einer punktierten Umgebung von z_0 :

$r > 0$, $B_r(z_0) \subseteq U$ $f|_{B_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$ ist hol.

$$\forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Der Koeffizient a_{-1} heißt RESIDUUM von f an der Stelle z_0 :

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$$

Nach der Formel der Koeffizienten der Laurententwicklung

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} f(z) dz$$

für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset U$.

Wie kann man das Residuum einer holomorphen Funktion in einem Punkt bestimmen?

Man könnte die Laurententwicklung bestimmen, aber in einigen Fällen gibt es Tricks, um Residuen zu berechnen.

1) f hat eine hebbare Singularität in z_0 (d.h. $\text{ord}(f, z_0) \geq 0$)
 $\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = 0$.

Das ist trivial, denn die Laurententwicklung von f hat keine Summanden mit negativen Grade.

Beispiel $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0$

$$\text{Res}(z^2, 0) = 0$$

2) f hat einen Pol in z_0 mit $\text{ord}(f, z_0) = -1$ einfacher Pol

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$$

Bws h holomorph in einer Umgebung von z_0

$$f(z) = (z - z_0)^{-1} \cdot h(z) = \frac{h(z_0) + h'(z_0) \cdot (z - z_0) + \dots}{z - z_0}$$

$$= \frac{h(z_0)}{z - z_0} + h'(z_0) + \dots$$

$$\text{Res}(f, z_0) = h(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z - z_0). \quad \square$$

Beispiel $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$, $\text{ord}(f, 1) = -1$.

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z) \cdot (z - 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z-2} = \frac{1}{1-2} = -1.$$

3) $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$, $g \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{0\})$

$f(z_0) \neq 0$, $\text{ord}(g, z_0) = 1$.

$$\Rightarrow \text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

[SEHR NÜTZLICH!]

BWS $\text{ord}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = -1 \Rightarrow \text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot \frac{f(z)}{g(z)} =$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad \square$$

$\uparrow$
 $g(z_0) = 0$

Beispiel $\text{Res}\left(\frac{z^3}{z^2 + 1}, i\right) = \frac{z^3}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{i^3}{2i} = \frac{i^2}{2} = -\frac{1}{2}$

4) f hat einen Pol in z_0 mit $\text{ord}(f, z_0) \leq -2$:

$$\text{ord}(f, z_0) = -k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 2.$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}, \quad h \text{ ist eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von } z_0$$

Die Potenzreihenentwicklung von h in z_0 gibt die Laurententwicklung von f in z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-k}$$

$$n - k = -1 \Rightarrow n = k - 1$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

Beispiel $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$

$$h(z) = (z-1)^2 \cdot f(z) = \frac{z^2}{z+1}$$

$$h'(z) = \frac{2z \cdot (z+1) - z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2}$$

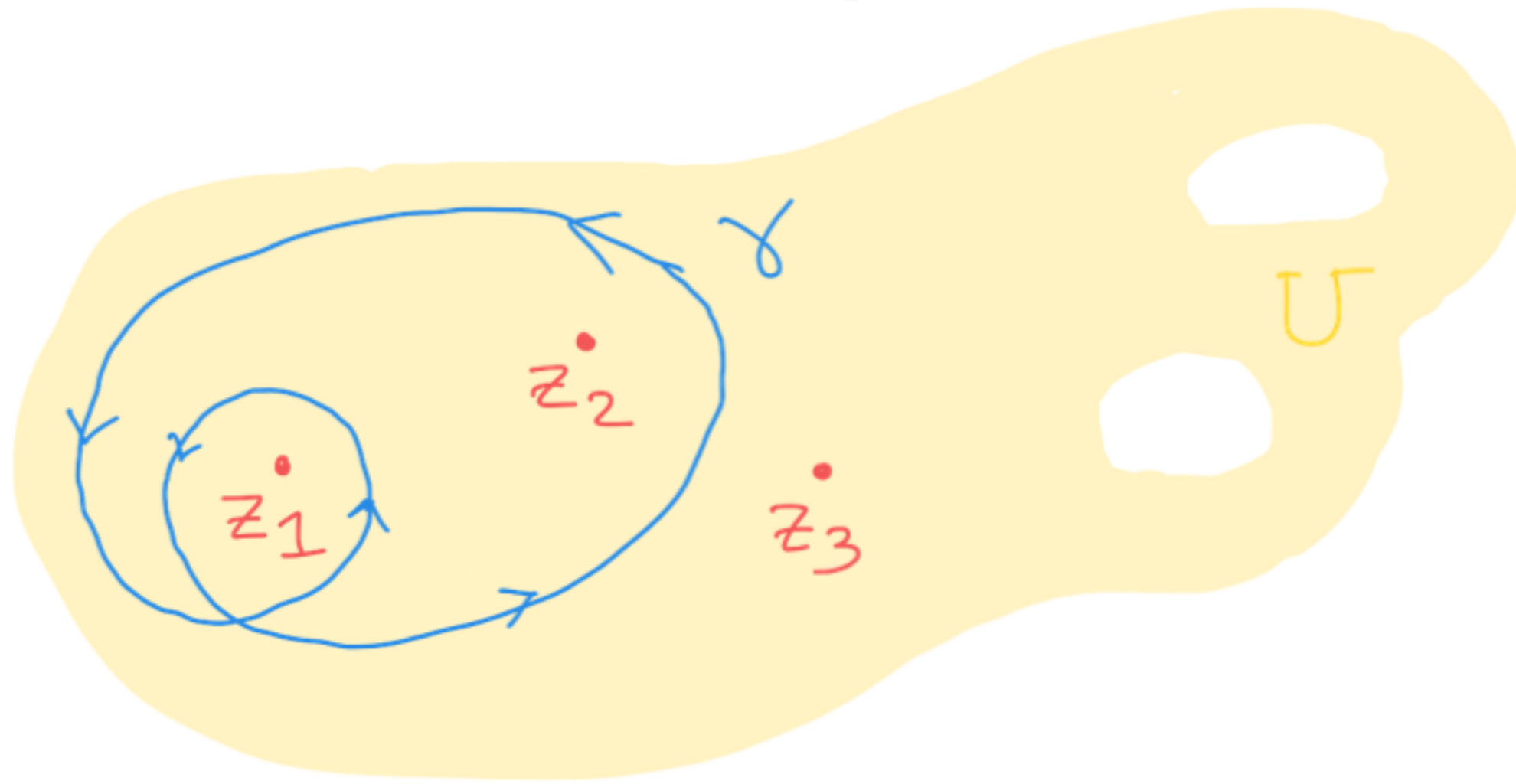
$$\text{ord}(f, 1) = -2 \Rightarrow \text{Res}(f, 1) = h'(1) = \left. \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} \right|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

Wenn f hat eine wesentliche Singularität in z_0 , gibt es keinen Trick: man muss die Laurententwicklung bestimmen.

Beispiel $z^3 \cdot \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^{-n+3}$

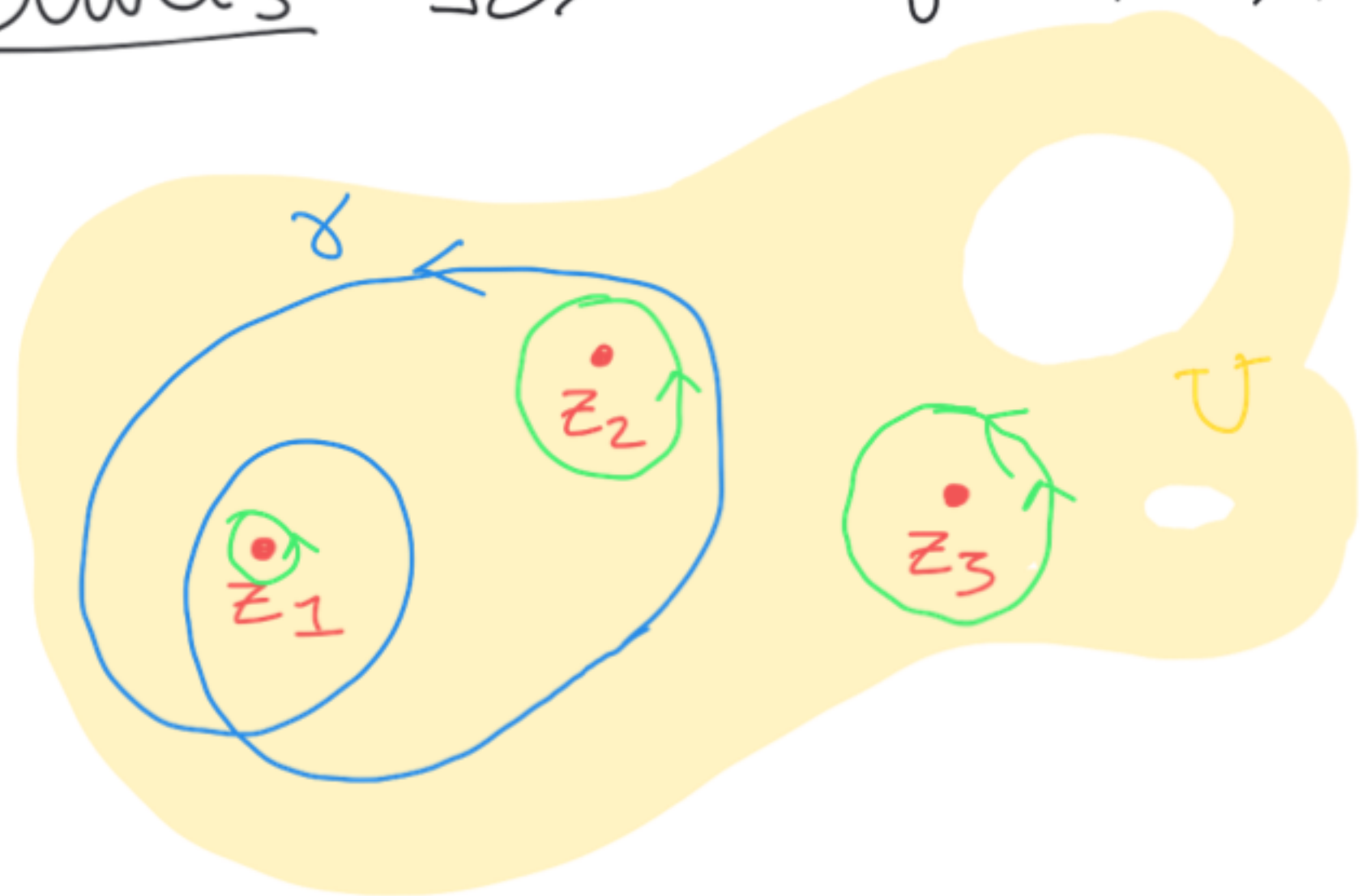
$$\text{Res}\left(z^3 \cdot \exp\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Residuensatz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen
 $z_1, \dots, z_k \in U$ paarweise verschieden
 $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$
 γ Schleife in $U \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$
 γ nullhomolog in U



$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) \cdot W(\gamma, z_j)$$

Beweis $\exists \varepsilon > 0 : \forall j = 1, \dots, k \quad \overline{B_\varepsilon(z_j)} \subset U$



Man betrachte die Schleifen $\partial B_\varepsilon(z_j)$ für $j = 1, \dots, k$.

γ nullhomolog in $U \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ in $U \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ ist γ
homolog zu $\sum_{j=1}^k W(\gamma, z_j) \cdot \partial B_\varepsilon(z_j)$

[Was ist der Kernel von $\pi_1(U \setminus \{z_1, \dots, z_k\}) \rightarrow \pi_1(U)$]

$f(z)dz$ lokal exakt auf $U \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \Rightarrow$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^k W(\gamma, z_j) \cdot \int_{\partial B_\varepsilon(z_j)} f(z)dz = \sum_{j=1}^k W(\gamma, z_j) \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j)$$

□

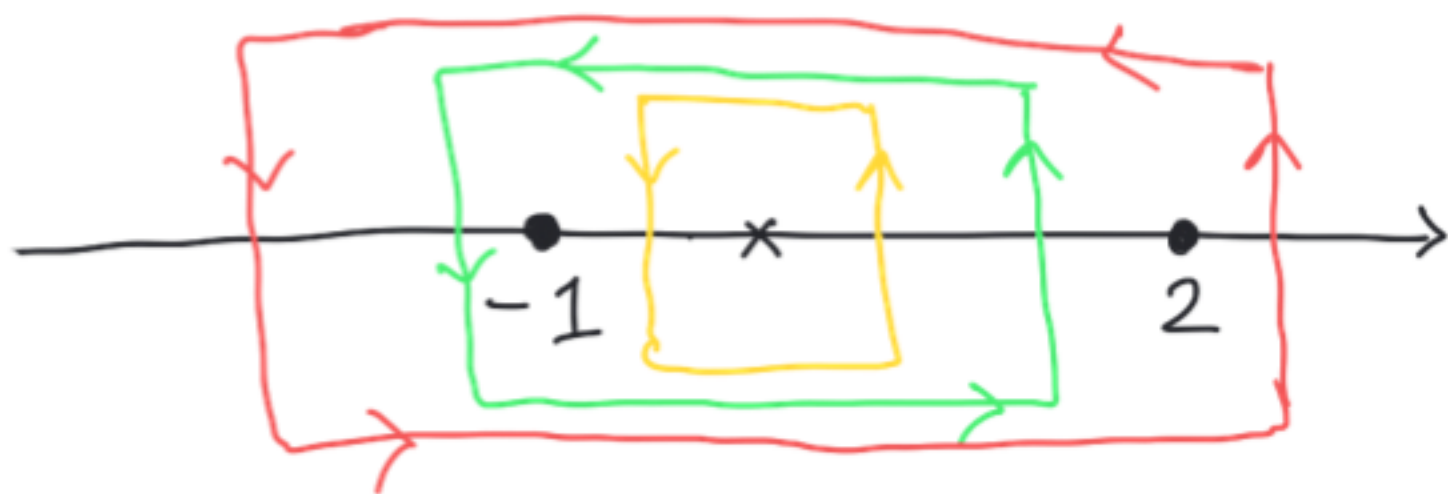
Beispiel (Aufgabe 7.1.1) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{-1, 2\})$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}, \quad \omega = f(z)dz \text{ auf } \mathbb{C} \setminus \{-1, 2\}.$$

$$\text{ord}(f, -1) = -1 \Rightarrow \text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot f(z) = \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ord}(f, 2) = -1 \Rightarrow \text{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \cdot f(z) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$R_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Re} z| \leq r, |\text{Im} z| \leq 1\}$$



$$I_1(r) = \int_{\partial R_r} \omega = \begin{cases} 0 & 0 < r < 1 \\ -\frac{2\pi i}{3} & 1 < r < 2 \\ 0 & r > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 < r < 1 \\ 1 < r < 2 \\ r > 2 \end{aligned}$$

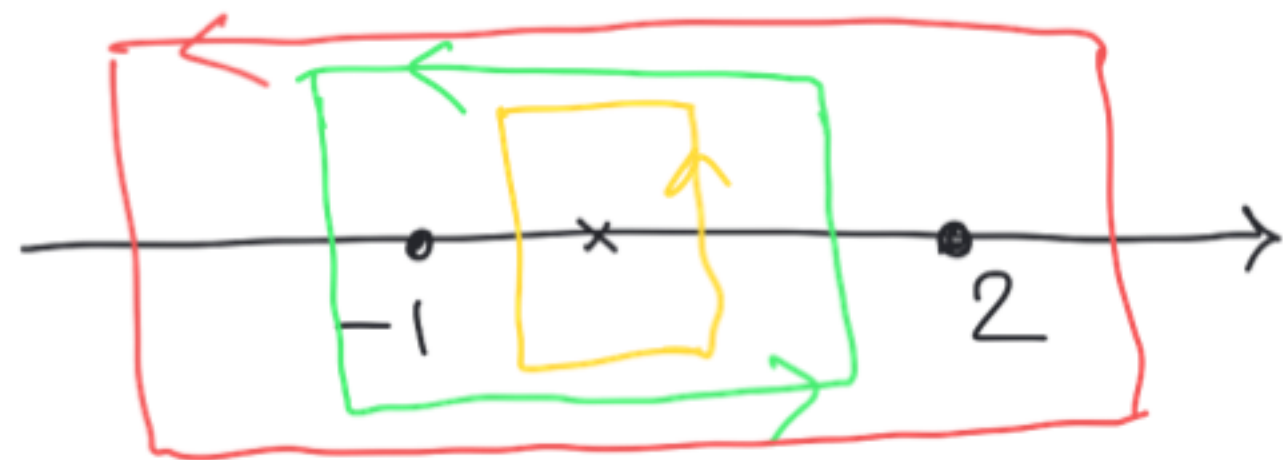
Beispiel (Aufgabe 7.1.2) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{-1, 2\})$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)^2}$$

$$\omega = f(z) dz \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \{-1, 2\}$$

$$\text{ord}(f, -1) = -1 \Rightarrow \text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot f(z) = \frac{1}{(-1-2)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}(f, 2) = -2 \Rightarrow \text{Res}(f, 2) &= \left(f(z) \cdot (z-2)^2 \right)' \Big|_{z=2} = \left(\frac{1}{z+1} \right)' \Big|_{z=2} \\ &= -\frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=2} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$



$$I_2(r) = \int_{\partial R_r} \omega = \begin{cases} 0 & 0 < r < 1 \\ \frac{2\pi i}{9} & 1 < r < 2 \\ 0 & r > 2 \end{cases}$$

$$0 < r < 1$$

$$1 < r < 2$$

$$r > 2$$

$$R_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq r, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$$