

Hier wird man sehen, dass der Residuensatz nützlich ist, um einige Integrale reeller Funktionen in einer reellen Variablen zu berechnen.

① $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ wobei $R(x, y)$ eine rationale Funktion in 2 Variablen ist.

② $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ wobei R eine rationale Funktion in 1 Variablen ist.

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx$ wobei R eine rationale Funktion in 1 Variablen ist.

④ $\int_0^{+\infty} x^\lambda \cdot R(x) dx$ wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und R eine rationale Funktion in 1 Variablen ist.

① Sei $R(x,y) \in \mathbb{C}(x,y)$ eine rationale Funktion in 2 Variablen:
 $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ Polynome.

Man nehme an, dass $Q(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$ gilt. Man betrachte die meromorphe Funktion

$$f(z) = R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz} \quad \text{auf } \mathbb{C}.$$

Dann
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \cdot \sum_{z \in B_1(0)} \text{Res}(f, z)$$

Beweis
$$2\pi i \cdot \sum_{z \in B_1(0)} \text{Res}(f, z) = \int_{\partial B_1(0)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \frac{1}{ie^{it}} i e^{it} dt$$

$\partial B_1(0): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto \cos t + i \sin t$

$$\begin{aligned} z &= e^{it} = \cos t + i \sin t \\ \frac{z+z^{-1}}{2} &= \cos t, \quad \frac{z-z^{-1}}{2i} = \sin t \end{aligned}$$

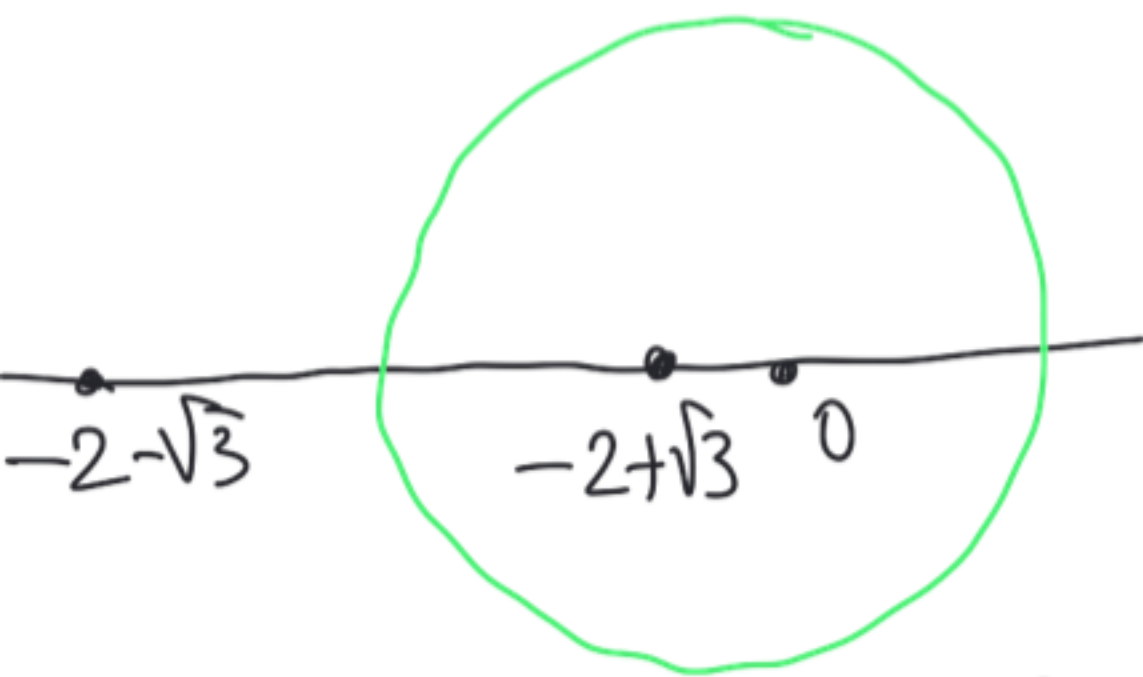
Beispiel $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$

$$R(x, y) = \frac{1}{2+x}, \quad f(z) = R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz} = \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz}$$

$$= \frac{2}{4+z+z^{-1}} \cdot \frac{1}{iz} = \frac{2}{i(z^2+4z+1)}$$

Wo sind die Pole von f ?

Pole von f = Nullstelle von z^2+4z+1 : $-2 \pm \sqrt{3}$.



$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -2+\sqrt{3}) &= \frac{2}{i(2z+4)} \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2}{i(-4+2\sqrt{3}+4)} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2+\sqrt{3}) = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

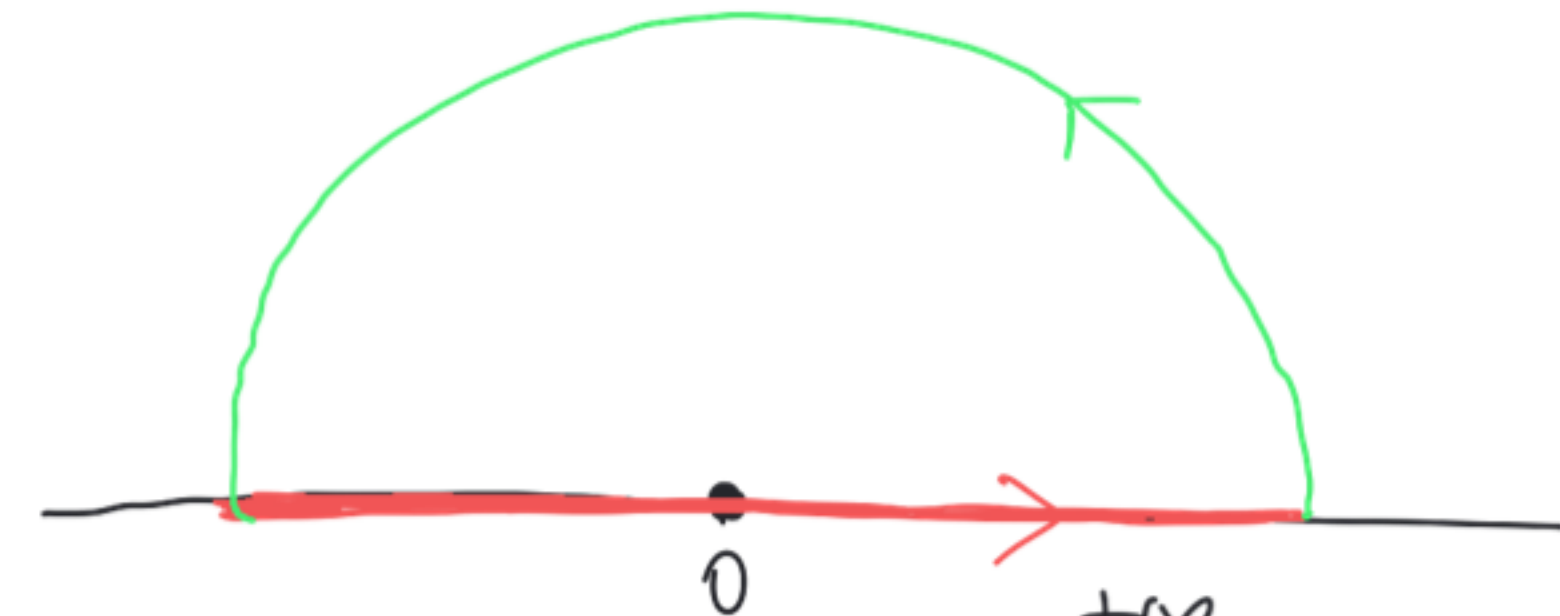
② $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome. Q hat keine reelle Nullstelle.

$$\deg Q \geq 2 + \deg P \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{z_0 \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Im} z_0 > 0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right)$$

Beweis (ähnlich zu Aufgabe 5.4) Für jedes $r > 0$

$$\alpha_r: [-r, r] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t$$

$$\beta_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto r e^{it}$$



$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Q hat endlich viele Nullstellen $\Rightarrow$
 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ hat endlich viele Pole $\Rightarrow$ wenn r
 genug groß ist,
 $2\pi i \cdot \sum_{\substack{z_0 \in \mathbb{C} \\ \operatorname{Im} z_0 > 0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right) = \int_{\alpha_r + \beta_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$

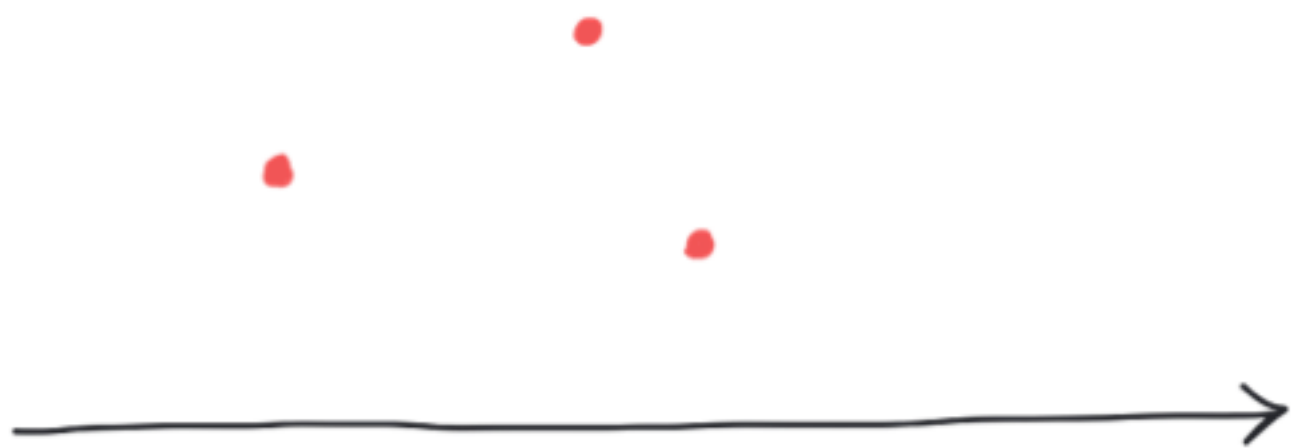
$$\left| \int_{\beta_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq 2\pi r \cdot \max_{z \in \beta_r([0, \pi])} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \xrightarrow{\deg Q \geq 2 + \deg P} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\beta_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0 \quad \square$$

③ $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$
 $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $U \supset \overline{H}$, $z_1, \dots, z_k \in H$ paarweise verschieden
 $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$.

Man nehme an, dass $\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in \overline{H}}} |f(z)| = 0$, d.h.

$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall z \in \overline{H}, |z| \geq R \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon$.

Dann: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f(z) e^{iz}, z_j)$



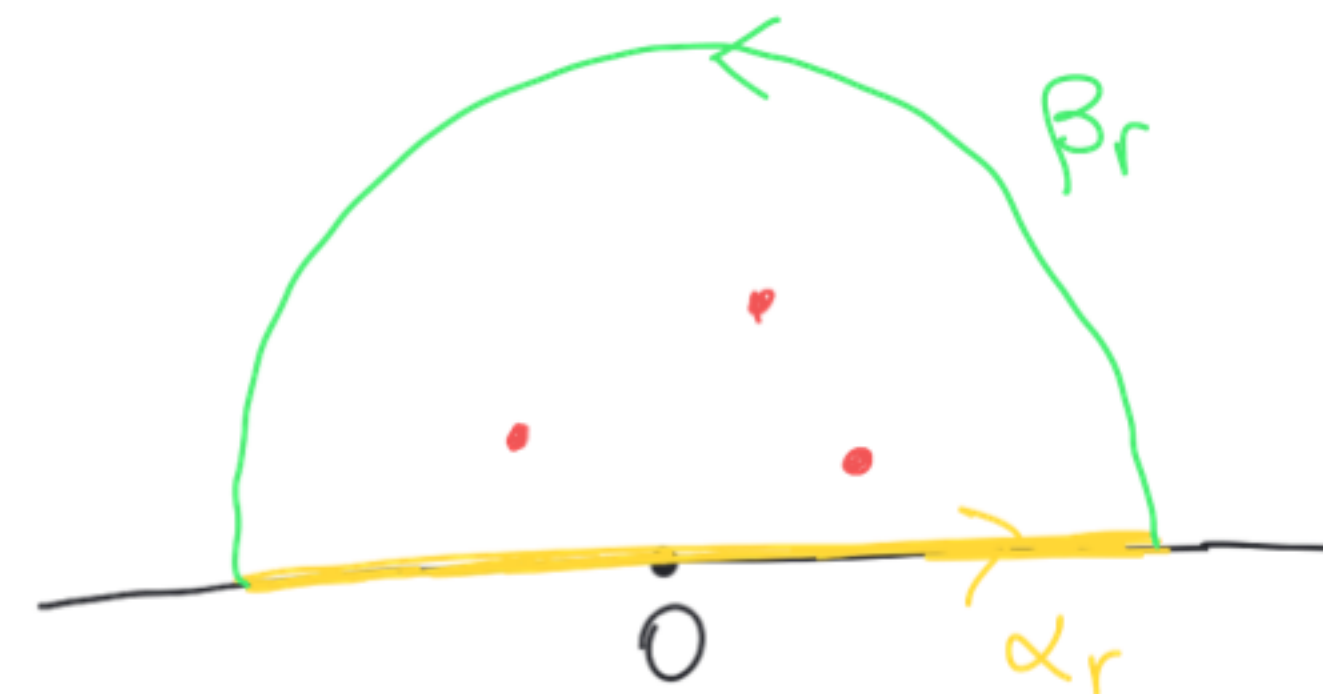
Beweis Für jedes $r > \max \{|z_1|, \dots, |z_k|\}$

$$\alpha_r: [-r, r] \rightarrow \mathbb{C}$$

$t \mapsto t$

$$\beta_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$t \mapsto re^{it}$



Residuensatz $\Rightarrow$

$$2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z)e^{iz}, z_j) = \int_{\alpha_r * \beta_r} f(z)e^{iz} dz$$

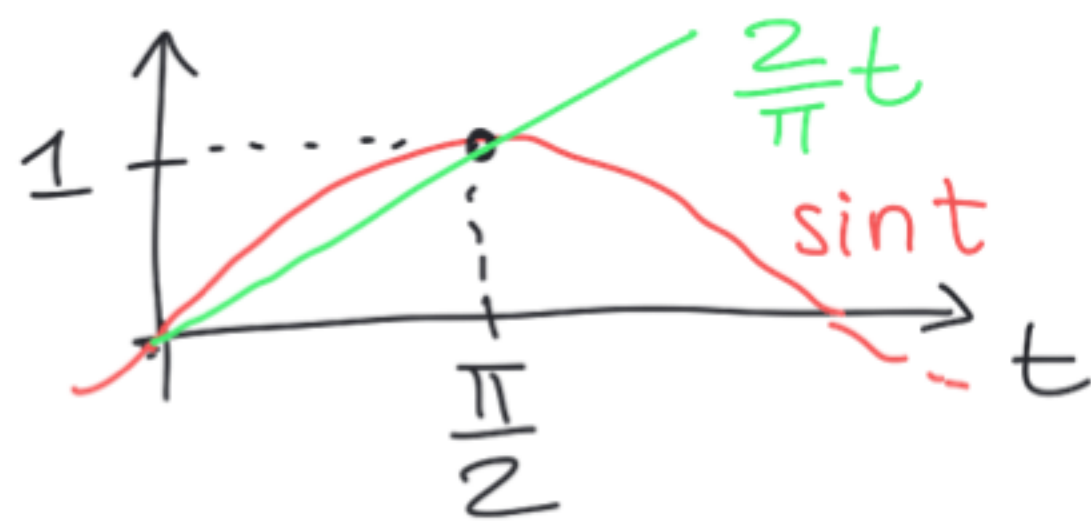
$$= \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz} dz + \int_{\beta_r} f(z)e^{iz} dz$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx$$

Man will beweisen, dass $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\beta_r} f(z)e^{iz} dz = 0$ gilt.

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin t$$

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad -\sin t \leq -\frac{2}{\pi}t$$



$$\forall r > 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad -r \sin t \leq -\frac{2}{\pi}rt$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} r dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}rt} r dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}rt} r dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-r \sin t} r dt = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin t} r dt \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\left[\forall r > 0, \int_0^{\pi} e^{-r \sin t} r dt \leq \pi \right] (*)$$

$$\forall r > \max \{ |z_1|, \dots, |z_k| \}$$

$$M(r) := \max_{t \in [0, \pi]} |f(re^{it})| = \max_{[0, \pi]} |f \circ \beta_r|$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} M(r) = 0.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_r} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(re^{it}) e^{ire^{it}} r e^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^\pi |f(re^{it})| e^{-rs \sin t} r dt \leq M(r) \cdot \int_0^\pi e^{-rs \sin t} r dt \leq \pi \cdot M(r) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{B_r} f(z) e^{iz} dz = 0. \quad \square$$

Beispiel $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right)$

$$= 2\pi i \cdot \left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

$f: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = 0$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = 0$$

④ $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ Polynome

Ähnlich zu Aufgabe 8.5

- $P(0) \neq 0$
- Q hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}_{\geq 0}$
- $\deg Q > \deg P$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit $-1 < \lambda < \deg Q - \deg P - 1$

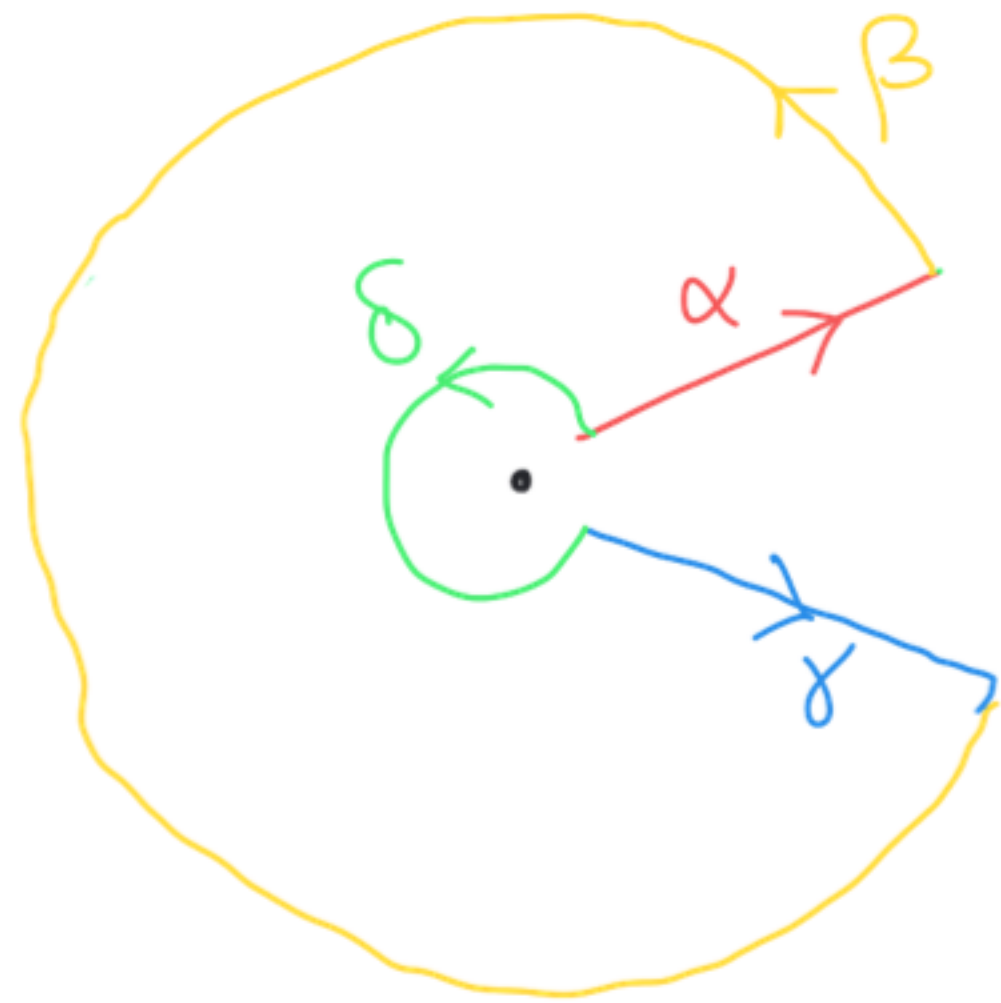
$$U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$g: U \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\rho e^{i\theta} \mapsto \rho^\lambda e^{i\lambda\theta} \quad \text{wobei } \rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$$

Dann $g \in \mathcal{O}(U)$ und

$$\int_0^{+\infty} x^\lambda \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\lambda i}} \cdot \sum_{\substack{z_0 \text{ Nullstelle} \\ \text{von } Q}} \operatorname{Res} \left(g(z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_0 \right)$$

Beweis Für $\varepsilon > 0$ klein, $r > 0$ groß, $\phi > 0$ klein betrachte man die Wege $\alpha_{\varepsilon, r, \phi}$, $\beta_{\varepsilon, r, \phi}$, $\gamma_{\varepsilon, r, \phi}$, $\delta_{\varepsilon, r, \phi}$ wie in Aufgabe 8.5.



Residuensatz für $g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} \Rightarrow \omega = g(z) \frac{P(z)}{Q(z)}$

$$2\pi i \cdot \sum_{\substack{z_0 \text{ Nullstelle} \\ \text{von } Q}} \text{Res}\left(g \cdot \frac{P}{Q}, z_0\right) = \int_{\alpha_{\varepsilon, r, \phi} * \beta_{\varepsilon, r, \phi} * \iota(\gamma_{\varepsilon, r, \phi}) * \iota(\delta_{\varepsilon, r, \phi})} \omega$$

$$= \int_{\alpha_{\varepsilon, r, \phi}} \omega + \int_{\beta_{\varepsilon, r, \phi}} \omega - \int_{\gamma_{\varepsilon, r, \phi}} \omega - \int_{\delta_{\varepsilon, r, \phi}} \omega$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\alpha_{\varepsilon, r, \phi}} \omega = I := \int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_{\varepsilon, r, \phi}} \omega = e^{2\pi\lambda i} \cdot I$$

$$r \rightarrow +\infty \Rightarrow \left| \int_{\beta_{\varepsilon, r, \phi}} \omega \right| \sim r^\lambda \frac{r^{\deg P}}{r^{\deg Q}} r = \frac{r^\lambda}{r^{\deg Q - \deg P - 1}} \rightarrow 0$$

$$\varepsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow \left| \int_{\delta_{\varepsilon, r, \phi}} \omega \right| \sim \varepsilon^\lambda \cdot \varepsilon = \varepsilon^{\lambda+1} \rightarrow 0$$