

Def $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend. $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$.
Die LOGARITHMISCHE ABLEITUNG von f ist

$$\frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(U).$$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$, $z_0 \in U$
 $\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \operatorname{ord}(f, z_0)$

Bws $k = \operatorname{ord}(f, z_0) \in \mathbb{Z}$.

$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ wobei g eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von z_0 mit $g(z_0) \neq 0$.

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k \cdot g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k. \quad \square$$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_1, \dots, z_k \in U$ paarweise verschieden.
 $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph
 $\forall j=1, \dots, k$ hat f in z_j einen Pol oder eine hebbare Singularität
 γ Schleife in $U \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$
 γ nullhomolog in U .
 $\Rightarrow W(f \circ \gamma, 0) = \sum_{j=1}^k \text{ord}(f, z_j) \cdot W(\gamma, z_j)$

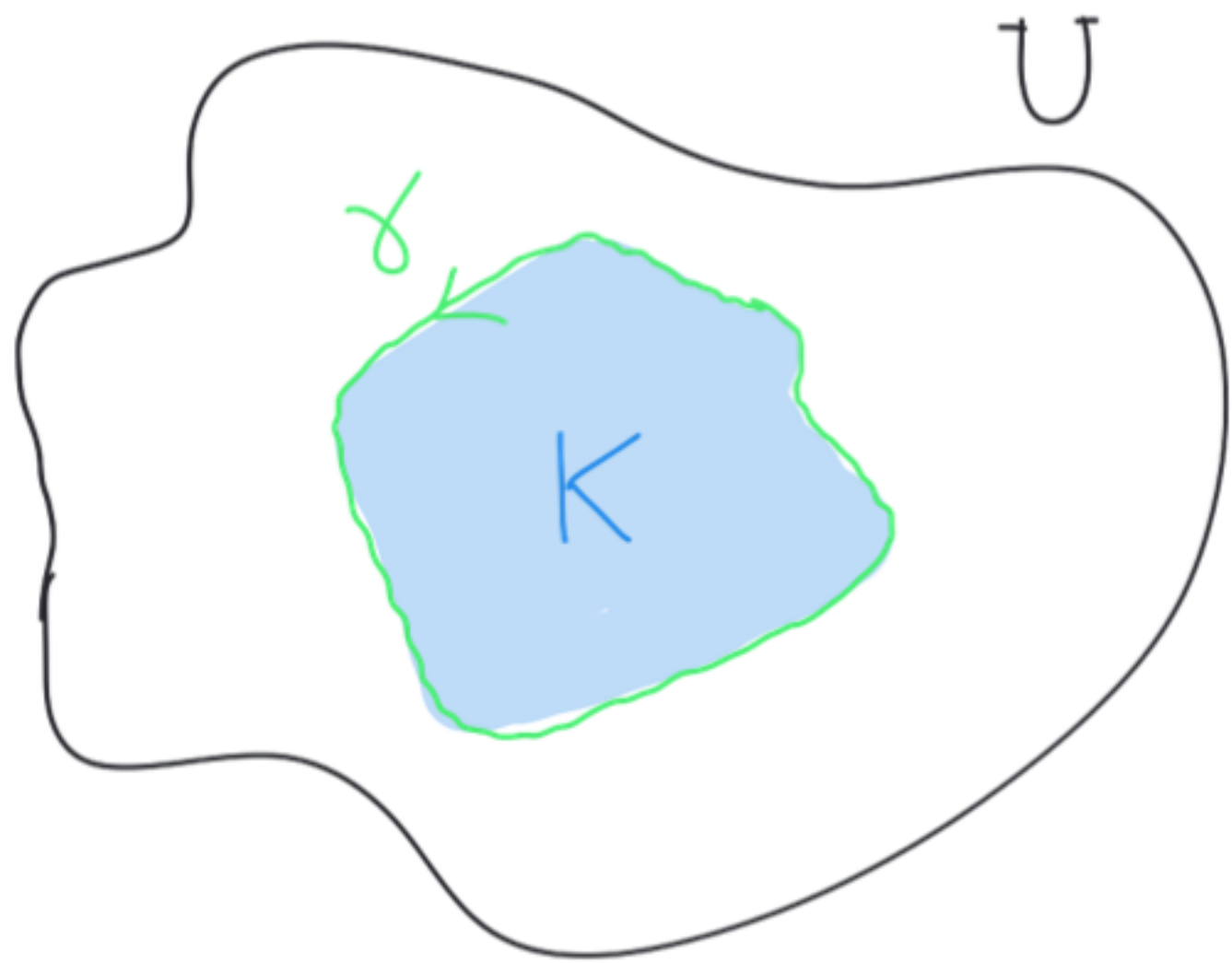
Beweis

$$W(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) \cdot W(\gamma, z_j)$$

Aufgabe 7.4a
Residuensatz
für $\frac{f'}{f}$

□

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$
 $K \subset U$ kompakt mit inner Kern $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$
 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise C^1 Schleife mit $\gamma(a) = \gamma(b)$,
 $\gamma|_{(a, b)}: (a, b) \rightarrow U$ injektiv und $\gamma([a, b]) = \partial K$ (Rand von K)
 Man nehme an, dass die Orientierung von γ K links hält.
 f hat keine Nullstelle und keinen
 Pol auf ∂K



$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in \overset{\circ}{K}} \text{ord}(f, a)$$

Gesamtzahl
der Nullstellen — Gesamtzahl
der Polstellen
(mit Vielfachheiten gerechnet)

Beweis Es ist klar aus dem Bild, dass γ nullhomolog in U ist.

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot \sum_{a \in K^{\circ}} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = 2\pi i \cdot \sum_{a \in K^{\circ}} \operatorname{ord}(f, a)$$

Residuensatz

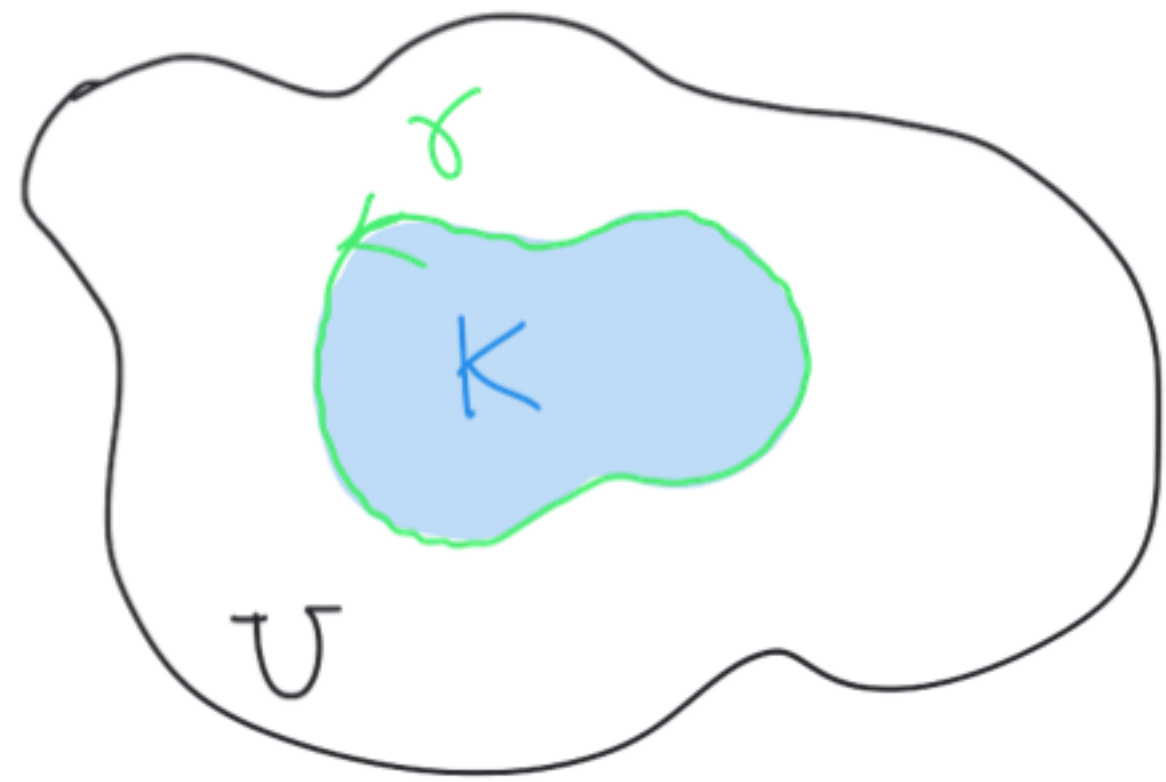
$$w(\gamma, a) = \begin{cases} 1 & a \in K^{\circ} \\ 0 & a \in U \setminus K \end{cases}$$

Bemerkung $f \in M(U) \setminus \{0\}$

$f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(\infty)$ diskret

$K \subset U$ kompakt $\Rightarrow K \cap f^{-1}(0), K \cap f^{-1}(\infty)$ endlich

Satz (Rouché) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend
 $K \subset U$ kompakt mit nicht leerem innerem Kern: $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$
 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise C^1 Schleife mit $\gamma(a) = \gamma(b)$,
 $\gamma|_{(a, b)}$ injektiv, $\gamma([a, b]) = \partial K$. γ halte K links.



$f_1, f_2 \in \mathcal{M}(U)$ ohne Polstelle auf ∂K

$$\forall z \in \partial K \quad |f_1(z)| > |f_2(z)|$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in \overset{\circ}{K}} \text{ord}(f_1 + f_2, a) = \sum_{a \in \overset{\circ}{K}} \text{ord}(f_1, a)$$

Beweis Voraussetzung $\Rightarrow f_1$ und $f_1 + f_2$ haben keine Nullstelle auf ∂K .

$$\sum_{a \in \mathring{K}} \text{ord}(f_1, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} dz = W(f_1 \circ \gamma, 0)$$

$$\sum_{a \in \mathring{K}} \text{ord}(f_1 + f_2, a) = W((f_1 + f_2) \circ \gamma, 0)$$

Man zeigt, dass die Schleifen $f_1 \circ \gamma$ und $(f_1 + f_2) \circ \gamma$ homolog in $\mathbb{C}^*$ sind.

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &\xrightarrow{F} \mathbb{C}^* \\ (t, s) &\longmapsto f_1(\gamma(t)) + s \cdot f_2(\gamma(t)) \end{aligned}$$

$$F(\cdot, 0) = f_1 \circ \gamma$$

$$F(\cdot, 1) = (f_1 + f_2) \circ \gamma$$

$$F(0, \cdot) = F(1, \cdot)$$

Strecke von $f_1(\gamma(0))$

nach $f_1(\gamma(0)) + f_2(\gamma(0))$

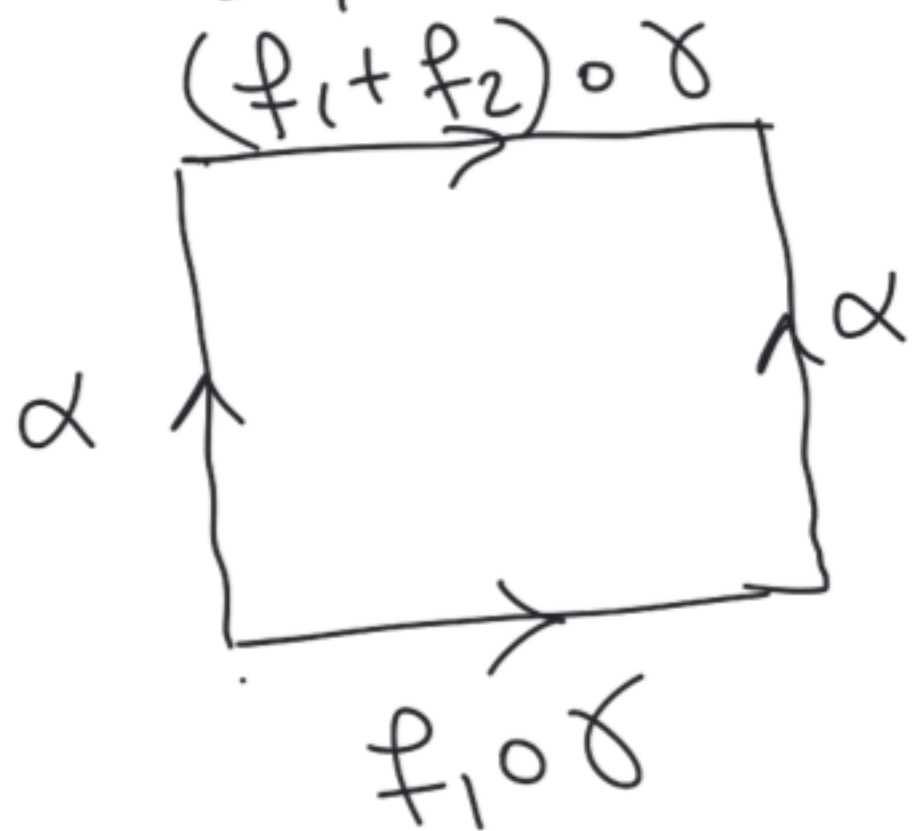
$$\forall s, t \in [0, 1]$$

$$|f_1(\gamma(t)) + s \cdot f_2(\gamma(t))| \geq |f_1(\gamma(t))| - s |f_2(\gamma(t))| \geq \\ \geq |f_1(\gamma(t))| - |f_2(\gamma(t))| > 0$$

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$s \mapsto f_1(\gamma(0)) + s \cdot f_2(\gamma(0))$$

$$F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$$



$f_1 \circ \gamma$ und $(f_1 + f_2) \circ \gamma$ erfüllen (*)
in Übung am 11.06.2020

$\Rightarrow f_1 \circ \gamma$ und $(f_1 + f_2) \circ \gamma$ homolog
in $\mathbb{C}^*$.



Beispiel $f(z) = z^5 + z^4 + 6z + 1$

Wo sind die Nullstellen von f ?

$$K = \overline{B_2(0)}, \quad f_1(z) = z^5, \quad f_2(z) = z^4 + 6z + 1 \quad f = f_1 + f_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall z \in \partial K \quad |z| = 2 \quad |f_1(z)| = 32 \\ |f_2(z)| \leq 2^4 + 6 \cdot 2 + 1 = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow |f_2(z)| < |f_1(z)| \quad \forall z \in \partial B_2(0)$$

$$\text{Rouché} \Rightarrow \# \text{ Nullstellen von } f \text{ in } B_2(0) = \# \text{ Nullstellen von } f_1 \text{ in } B_2(0) = 5$$

$$K = \overline{B_1(0)}, \quad f_1(z) = 6z, \quad f_2(z) = z^5 + z^4 + 1 \quad f = f_1 + f_2$$

$$\forall z \in \partial K \quad |z| = 1 \quad |f_1(z)| = 6 > 3 \geq |f_2(z)|$$

$$\text{Rouché} \Rightarrow \# \text{ Nullstellen von } f \text{ in } B_1(0) = \# \text{ Nullstellen von } f_1 \text{ in } B_1(0) = 1$$