

Man will das lokale Verhalten holomorpher Funktionen verstehen.

Wir werden sehen:

- wenn $f'(z_0) \neq 0$, dann ist f lokal ein Biholomorphismus

- wenn $k = \min \{ n \geq 1 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0 \}$, dann verhält f wie

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^k \end{array} \quad \text{um } 0$$

Satz der impliziten Funktion $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$.

$F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^k
 $(x^0, y^0) \in U$ wobei $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0) \in \mathbb{R}^m$

Die Jacobimatrix von F ist

$$J_F(x^0, y^0) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^0, y^0) \mid \frac{\partial F_i}{\partial y_h}(x^0, y^0) \right]_{\substack{1 \leq i, h \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Man nehme $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_h}(x^0, y^0) \right)_{1 \leq i, h \leq m} \neq 0$ an. $F(x^0, y^0) = 0$.
Dann: es gibt A offene Umgebung von x^0 in $\mathbb{R}^n$ und B offene
Umgebung von y^0 in $\mathbb{R}^m$, sodass $A \times B \subseteq U$ und

- $\forall x \in A, \exists! y \in B : F(x, y) = 0$

- die Abbildung $A \rightarrow B$
 $x \mapsto \text{das eindeutige } y \in B \text{ s.d. } F(x, y) = 0$ ist C^k .

Satz der Umkehrabbildung (inverse function theorem)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^k$ $k \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$

$x^0 \in U$. Die Jacobimatrix von f in x^0 ist $J_f(x^0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

Man nehme $\det J_f(x^0) \neq 0$ an.

$\Rightarrow$ es gibt A offene Umgebung von x^0 in U und
 B " " " " $f(x^0)$ in $\mathbb{R}^n$ s.d.

$f(A) = B$, $f|_A: A \rightarrow B$ bijektiv und

$(f|_A)^{-1}: B \rightarrow A \subset \mathbb{C}^k$.

BWS Umkehrabbildungssatz $y^0 = f(x^0) \in \mathbb{R}^n$.

$$F: \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad C^k$$

$$(y, x) \longmapsto y - f(x)$$

$$J_F(y^0, x^0) = \left[\underbrace{\text{id}_n}_n \mid \underbrace{-J_f(x^0)}_n \right] \Bigg\}^n$$

Man benutze den Satz der impliziten Funktion mit F
 $\Rightarrow$ es gibt $\tilde{A}$ offene Umgebung von y^0 in $\mathbb{R}^n$
 $\tilde{B}$ " " " " " " x^0 in U

s.d. $\forall y \in \tilde{A}, \exists! x \in \tilde{B}: y = f(x)$

$$g: \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$$

$y \mapsto$ das eindeutige $x \in \tilde{B}$ mit $f(x) = y$ ist C^k .

Man nehme $A = f^{-1}(\tilde{A}) \cap \tilde{B}$
 $B = \tilde{A}$

Dann $f(A) = B$, $f|_A: A \rightarrow B$ bijektiv.

$(f|_A)^{-1} = g$ ist C^k . $\square$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $z_0 \in U$, $f'(z_0) \neq 0$
 $\Rightarrow \exists$ offene Umgebung A von z_0 in U und offene
Umgebung B von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$, sodass
 $f|_A: A \rightarrow B$ ein Biholomorphismus ist.

Erster Beweis $U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Die Jacobimatrix von f in z_0
ist
$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$$

$f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow$ die Jacobimatrix von f in z_0 ist invertierbar.
Satz der Umkehrabbildung $\Rightarrow \exists$ offene Umgebung A von
 z_0 in U und offene Umgebung B von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$, sodass
 $f|_A: A \rightarrow B$ bijektiv ist und $f^{-1}: B \rightarrow A$ C^∞ ist.

Die Jacobimatrix von $f^{-1}: B \rightarrow A$ in $f(z)$, für $z \in A$, ist

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z) & -\operatorname{Im} f'(z) \\ \operatorname{Im} f'(z) & \operatorname{Re} f'(z) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|f'(z)|} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z) & \operatorname{Im} f'(z) \\ -\operatorname{Im} f'(z) & \operatorname{Re} f'(z) \end{pmatrix}$$

und erfüllt Cauchy-Riemann. $\Rightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$ holomorph. $\square$

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{\overline{f'(z)}}{|f'(z)|}$$

Zweiter Beweis OBdA $z_0=0$, $f(z_0)=0$.

Wenn man f durch $\frac{1}{f'(z_0)} f$ ersetzt, dann $f'(z_0)=1$ OBdA.

OBdA kann man immer U durch eine offene Umgebung von z_0 in U ersetzen.

$$U = B_\delta(0)$$

$$\forall z \in B_\delta(0) \quad f(z) = z + z^2 \cdot h(z) \quad \text{wobei } h \in \mathcal{O}(B_\delta(0))$$

$$h \text{ stetig in } 0 \Rightarrow \exists \delta' \in (0, \delta) : \forall z \in B_{\delta'}(0) \quad |h(z) - h(0)| \leq \frac{1}{2} |h(0)|$$

$$\forall z \in B_{\delta'}(0), \quad |h(z)| \leq \frac{3}{2} |h(0)|.$$

Man nehme $U = B_{\delta'}(0)$.

So: $U = B_\delta(0)$, $f \in \mathcal{O}(U)$, $h \in \mathcal{O}(U)$

$$\forall z \in U \quad f(z) = z + z^2 \cdot h(z)$$

$$\forall z \in U \quad |h(z)| \leq \frac{3}{2} |h(0)|$$

$$K = \frac{3}{2} |h(0)| \Rightarrow \forall z \in U = B_\delta(0), \quad \underline{|f(z) - z| \leq K \cdot |z|^2}.$$

Man wähle $0 < r < \min\{\delta, \frac{1}{2K}\}$.

Für jedes $w \in \underline{B_{\frac{r}{2}}(0)}$ betrachte man

$$f_w : U \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto f(z) - w$$

$$g_w : U \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z - w$$

$$\forall z \in \partial B_r(0), \quad |f_w(z) - g_w(z)| = |f(z) - z| \leq K \cdot |z|^2 = Kr^2 <$$

$$< \frac{r}{2} \quad \uparrow \quad |w| < r - |w| = |z| - |w| \leq |z - w| = |g_w(z)|$$

$$r < \frac{1}{2K}$$

$$\forall w \in B_{\frac{r}{2}}(0), \quad \forall z \in \partial B_r(0) \quad |f_w(z) - g_w(z)| < |g_w(z)|$$

$$f_w = g_w + (f_w - g_w)$$

Rouché $\Rightarrow \forall w \in B_{\frac{r}{2}}(0)$, die Funktionen f_w und g_w haben die gleiche Zahl von Nullstellen in $B_r(0)$

$g_w(z) = z - w$ hat genau eine Nullstelle in $B_r(0)$: w
 $\Rightarrow \exists! z \in B_r(0)$ s.d. $f_w(z) = 0$ $f(z) = w$.

$$\forall w \in B_{\frac{r}{2}}(0), \quad \exists! z \in B_r(0) : f(z) = w$$

$$A = \{z \in B_r(0) \mid f(z) \in B_{\frac{r}{2}}(0)\} = B_r(0) \cap f^{-1}(B_{\frac{r}{2}}(0))$$

offene Umgebung von z_0 in U

$$B = B_{\frac{r}{2}}(0) \quad f|_A : A \rightarrow B \text{ bijektiv.}$$

Man kann den schon gemachten Beweis bearbeiten, um zu zeigen:

$\forall V \subseteq A$ offen, $f(V)$ ist offen in B (in $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow f|_A: A \rightarrow B$ Homöomorphismus

$(f|_A)^{-1}$ ist holomorph, denn $\forall w_1 \in B$ $w_1 = f(z_1)$
 $w = f(z)$

$$\frac{(f|_A)^{-1}(w) - (f|_A)^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}} \xrightarrow[\substack{w \rightarrow w_1 \\ z \rightarrow z_1}]{\quad} \frac{1}{f'(z_1)}$$

□

Def $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ein LOKALER BIHOLOMORPHISMUS von U nach V ist eine holomorphe Abbildung $f: U \rightarrow V$, sodass $\forall z_0 \in U, \exists A$ offene Umgebung von z_0 in U und $\exists B$ offene Umgebung von $f(z_0)$ in V sodass $f|_A: A \rightarrow B$ ein Biholomorphismus ist.

Satz $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow V$ holomorph. Dann:
 f lokal Biholomorphismus $\iff \forall z_0 \in U \quad f'(z_0) \neq 0$

BWS $\Rightarrow$) Kettenregel

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & B \\ & \searrow \text{id}_A & \uparrow (f|_A)^{-1} \\ & & A \end{array}$$

$\Leftarrow$) Previous thm, $\square$

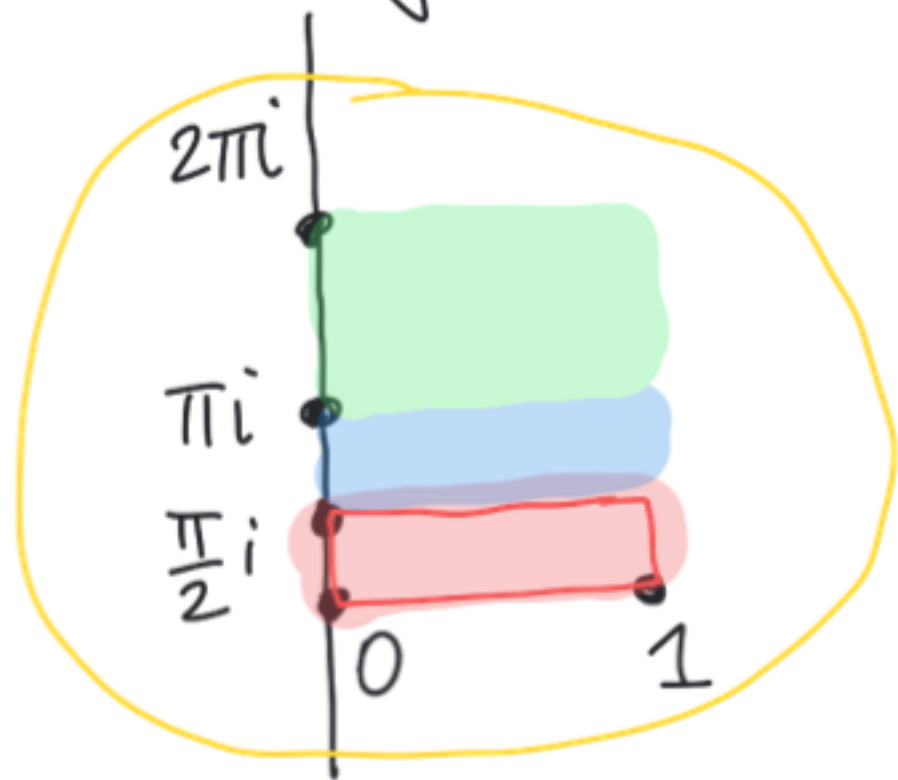
Beispiel 1) Jeder Biholomorphismus ist ein lokaler Biholomorphismus.

2) $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \quad z \mapsto e^z$

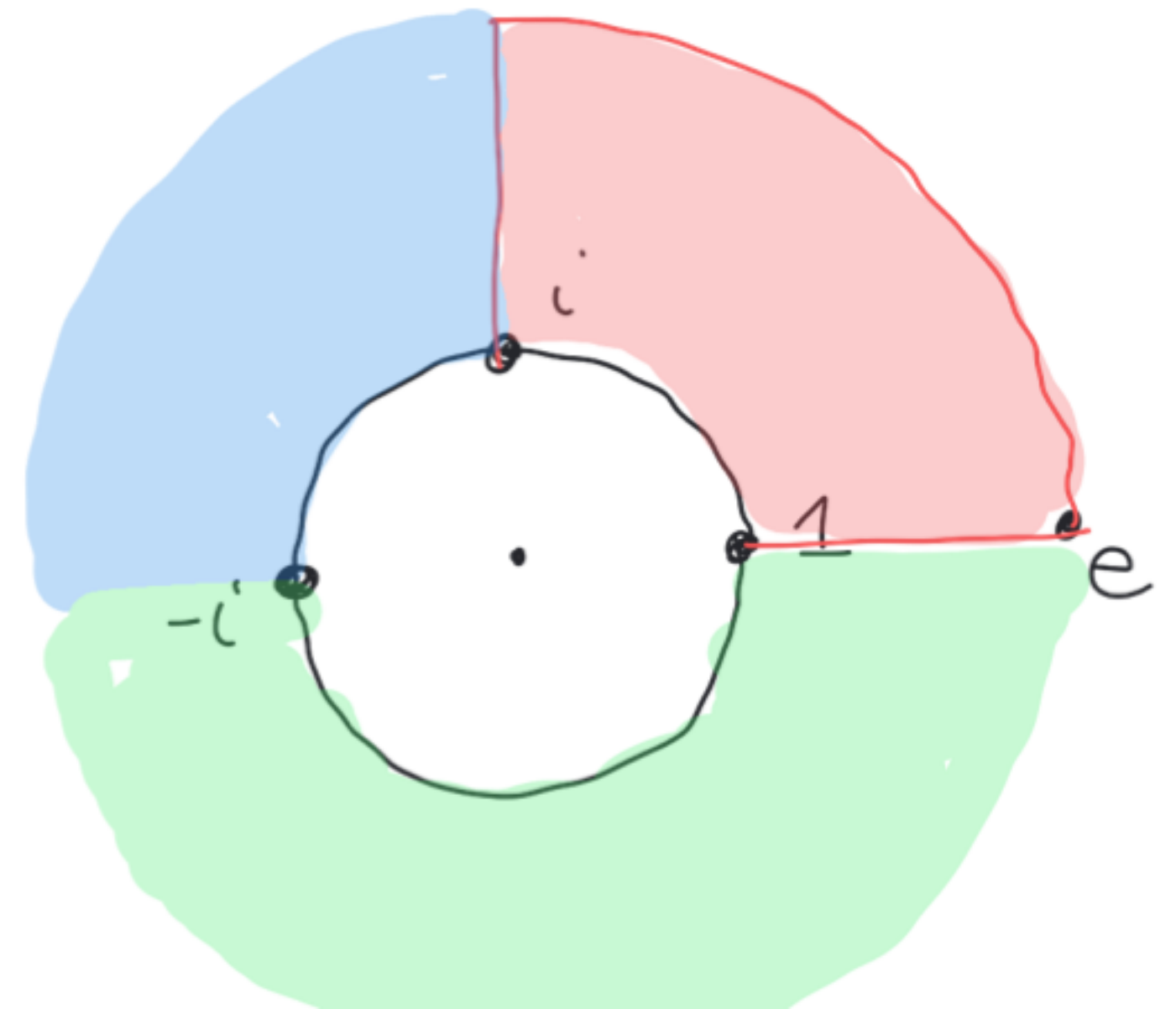
$\forall z \in \mathbb{C} \quad (\exp)'(z) = e^z \neq 0$

$\exp$ ist ein lokaler Biholomorphismus

$\exp$ ist kein Biholomorphismus, denn $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist nicht injektiv.



$\exp$

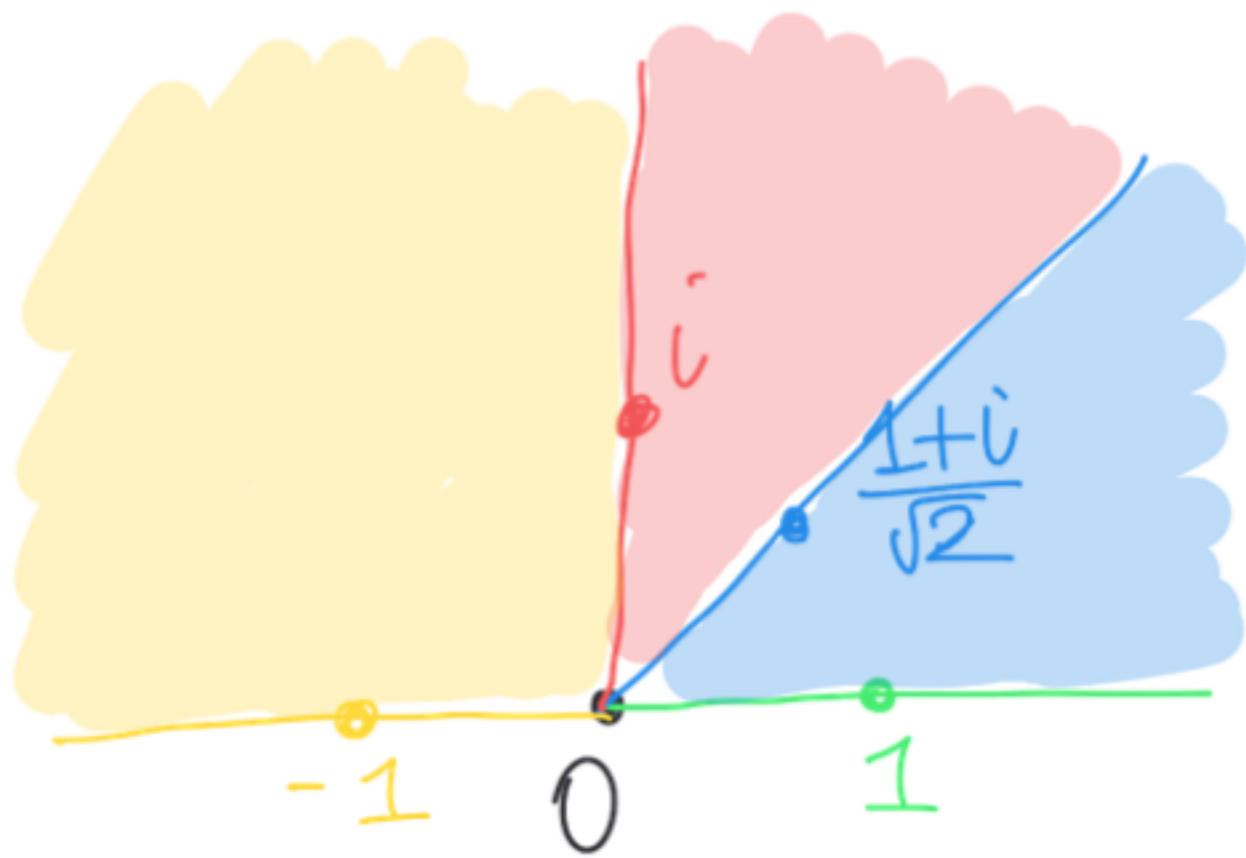


3) $n \in \mathbb{Z}$
 $n \neq 0$ $p_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \mapsto z^n$

$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad p'_n(z) = n z^{n-1} \neq 0 \Rightarrow p_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ lokaler Bihol.

$|n| \geq 2 \Rightarrow p_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist nicht injektiv

$\Rightarrow p_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist kein Biholomorphismus



p_2

