

„Holomorphe Funktionen ähneln z^k “

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht-konstant auf einer Umgebung von z_0 in U .

$$k = \text{ord}(f - f(z_0), z_0) = \min\{n \geq 1 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

$\Rightarrow$ Es gibt:

- A offene Umgebung von z_0 in U
- B " " " " " $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$ mit $f(A) = B$

- $\varepsilon > 0$
- $\varphi: A \rightarrow B_\varepsilon(0)$ Biholomorphismus mit $\varphi(z_0) = 0$
- $\psi: B \rightarrow B_{\varepsilon^k}(0)$ Biholomorphismus mit $\psi(f(z_0)) = 0$

sodass $\psi \circ f|_A = p_k \circ \varphi$

wobei $p_k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^k$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B_\varepsilon(0) \\ f|_A \downarrow & & \downarrow p_k|_{B_\varepsilon(0)} \\ B & \xrightarrow{\psi} & B_{\varepsilon^k}(0) \end{array}$$

BWS OBdA $z_0 = 0, f(z_0) = 0, U = B_r(0)$.

$$\forall z \in B_r(0), f(z) = z^k \cdot h(z)$$

wobei $h \in \mathcal{O}(B_r(0))$ mit $a := h(0) \neq 0$.

h stetig in 0 $\Rightarrow \exists r' \in (0, r) : h(B_{r'}(0)) \subseteq B_{|a|}(a) \subseteq \mathbb{C}^*$.

OBdA $r' = r$.

$B_{|a|}(a)$ einfach zusammenhängend, $B_{|a|}(a) \subseteq \mathbb{C}^* \Rightarrow$
es gibt eine k -te Wurzel der Identitätsabbildung auf $B_{|a|}(a)$
d.h.: $\exists \alpha : B_{|a|}(a) \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph, s.d. $\forall z \in B_{|a|}(a) \quad \alpha(z)^k = z$

Man betrachte $g : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph
 $z \mapsto z \cdot \alpha(h(z))$

$$\forall z \in B_r(0), g'(z) = \alpha(h(z)) + z \cdot \alpha'(h(z)) \cdot h'(z)$$

$$g'(0) = \alpha(h(0)) \neq 0$$

Man wende den Satz der Umkehrabbildung auf g an:
 es gibt: $\tilde{A}$ offene Umgebung von 0 in $B_r(0)$
 $\tilde{B}$ " " " " " " $\mathbb{C}$

s.d. $g(\tilde{A}) = \tilde{B}$ und $g|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ ein Biholomorphismus ist.

$$\forall z \in B_r(0) \quad g(z)^k = (z \cdot \alpha(h(z)))^k = z^k \cdot \alpha(h(z))^k = z^k \cdot h(z) = f(z)$$

Man wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq \tilde{B}$.

Man nehme $A = g^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subseteq \tilde{A}$ offene Umgebung von 0
 $B = f(A)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B_\varepsilon(0) \\ f|_A \downarrow & & \downarrow P_k|_{B_\varepsilon(0)} \\ B & = & B_\varepsilon(0) \end{array}$$

$\varphi = g|_A : A \rightarrow B_\varepsilon(0)$ Bihol.

$$\psi = \text{id}_B$$

□

Kor $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant auf einer Umgebung von z_0 in U .

$$k = \text{ord}(f - f(z_0), z_0) = \min \{n \geq 1 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

$\Rightarrow \exists$ A offene Umgebung von z_0 in U
 B " " " " $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$

sodass

$f|_{A \setminus \{z_0\}} : A \setminus \{z_0\} \rightarrow B \setminus \{f(z_0)\}$ ist k -to-1

d.h.: $\forall w \in B \setminus \{f(z_0)\}, \quad \#(f^{-1}(w) \cap A \setminus \{z_0\}) = k$

BWS $p_k : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $z \mapsto z^k$

$\forall w \in \mathbb{C}^*,$

$p_k^{-1}(w) = \{k\text{-te Wurzel von } w\}$
 $\square$

Def Ein GEBIET ist eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

OPEN MAPPING THEOREM

Satz (Gebietstreue) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend.

$f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant

$\Rightarrow \forall V \subseteq U$ offen, $f(V)$ ist offen in $\mathbb{C}$

Bws Sei $z_0 \in V$. Man will zeigen, dass $f(V)$ eine Umgebung von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$ ist.

U zusammenhängend
 $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant

$\left\{ \begin{array}{l} \text{PRINCIPLE OF ANALYTIC} \\ \text{CONTINUATION} \end{array} \right. \Rightarrow f \text{ ist nicht konstant auf einer Umgebung von } z_0$

$k = \text{ord}(f - f(z_0), z_0) = \min \{n \geq 1 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$.

Vorheriger Satz $\Rightarrow \exists A$ off. Umg von z_0 in V s.d. $f(A) = B$
 B off. Umg von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$

$f(A) = B$ offen in $\mathbb{C}$

$z_0 \in A \subseteq V \Rightarrow f(z_0) \in f(A) \subseteq f(V).$

$\Rightarrow f(V)$ ist eine Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$. $\square$

Bemerkung Es ist wichtig, dass U zusammenhängend ist.

z.B.: $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{O}(U)$

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \operatorname{Im} z > 0 \\ -1 & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

$f(U) = \{1, -1\}$ ist nicht offen in $\mathbb{C}$.

Bem Die Bildmenge von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ ist $[0, +\infty)$

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(U)$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- 1) $f(U)$ ist offen in $\mathbb{C}$ und $f: U \rightarrow f(U)$ ist ein Biholomorphismus
- 2) $f: U \rightarrow f(U)$ ist ein Homöomorphismus
- 3) f ist injektiv

BWS $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$: trivial.

$3 \Rightarrow 1$:

f injektiv $\Rightarrow f$ nicht konstant $\Rightarrow f(U)$ offen in $\mathbb{C}$.

f injektiv $\Rightarrow \forall z_0 \in U \text{ ord}(f - f(z_0), z_0) = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall z_0 \in U \quad f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ ist ein lokaler Biholomorphismus.
 $\Rightarrow f: U \rightarrow f(U)$ Biholomorphismus. $\square$