

In Funktionentheorie gibt es die folgenden 3 Probleme:

① $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(U)$.
Wann ist f die Ableitung einer holomorphen Funktion auf U ?

② $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend [Aufgabe 7.4]
 $h: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph
Wann hat h einen Logarithmus?
Wann gibt es $f \in \mathcal{O}(U)$ s.d. $\exp \circ f = h$?

③ $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ [Aufgabe 10.4]
 $h: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph. Wann hat h eine n -te Wurzel?
Wann gibt es $g: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph mit $p_n \circ g = h$?

Def X wegzusammenhängender topologischer Raum.

G abelsche Gruppe

Die ERSTE COHOMOLOGIE GRUPPE von X mit Koeffizienten in G ist

$$H^1(X, G) := \text{Hom}(\pi_1(X, x_0), G) = \left\{ \pi_1(X, x_0) \rightarrow G \text{ Gruppen-homomorphismen} \right\}$$

wobei $x_0 \in X$ beliebig ist

• $H^1(X, G)$ ist eine abelsche Gruppe.

• X einfach zusammenhängend $\Rightarrow H^1(X, G)$ triviale Gruppe

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, $x_0 \in U$.

ω lokal exakte 1-Form auf U

$$[\omega]: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

wohldefiniert, weil ω
lokal exakt ist

$$[\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} \omega$$

↑
weghomotopie-klass

$$\begin{aligned} [\omega]([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) &= [\omega]([\gamma_1 * \gamma_2]) = \int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \\ &= [\omega]([\gamma_1]) + [\omega]([\gamma_2]) \end{aligned}$$

$$[\omega]: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{Gruppenhomomorphismus.}$$

$$\rightsquigarrow [\omega] \in H^1(U, \mathbb{R}).$$

ω exakt $\Leftrightarrow [\omega]$ ist der Nullhomomorph.

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $z_0 \in U$.

①

$D: \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ Homomorphismus von
 $f \longmapsto f'$ abelschen Gruppen

Was ist die Bildmenge von D ?

$f \in \mathcal{O}(U)$. $f(z)dz$ lokal exakt 1-Form auf U .

$f \in \text{Im } D \iff f(z)dz$ ist exakt auf $U \iff$

$\iff [f(z)dz] = 0$ in $H^1(U, \mathbb{C})$.

$[f(z)dz]: \pi_1(U, z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$

$[\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} f(z)dz.$

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $z_0 \in U$.

$$D: \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$$
$$f \longmapsto f'$$

D ist ein Gruppenhomomorphismus
weil $(f+g)' = f' + g'$

$$\partial: \mathcal{O}(U) \longrightarrow H^1(U, \mathbb{C})$$

$$f \longmapsto \left([f(z)dz]: \pi_1(U, z_0) \longrightarrow \mathbb{C} \right.$$
$$\left. [\gamma] \longmapsto \int_{\gamma} f(z)dz \right)$$

∂ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\text{Im } D = \text{Ker } \partial$$

1

② $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, $z_0 \in U$.

$$E: \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U)^* = \{h: U \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ holomorph}\}$$

$$f \longmapsto \left[\exp \circ f: U \longrightarrow \mathbb{C}^* \right. \\ \left. z \longmapsto e^{f(z)} \right]$$

$E: (\mathcal{O}(U), +) \longrightarrow (\mathcal{O}(U)^*, \cdot)$ ist eine Gruppenhomomorphismus

$$E(f_1 + f_2) = \exp \circ (f_1 + f_2) = (\exp \circ f_1) \cdot (\exp \circ f_2) = E(f_1) \cdot E(f_2)$$

$$\partial: \mathcal{O}(U)^* \longrightarrow H^1(U, \mathbb{Z})$$

$$h \longmapsto \left[\begin{array}{l} \pi_1(U, z_0) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = W(h \circ \gamma, 0) \end{array} \right]$$

Aufgabe 7.4 $\Rightarrow \text{Im } E = \text{Ker } \partial$

③ $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $z_0 \in U$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$P_n: \mathcal{O}(U)^* \longrightarrow \mathcal{O}(U)^*$$

Gruppenhomomorphismus

$$g \longmapsto \begin{pmatrix} P_n \circ g: U \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z \longmapsto (g(z))^n \end{pmatrix}$$

$$\partial: \mathcal{O}(U)^* \longrightarrow H^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Gruppenhomomorphismus

$$h \longmapsto \begin{bmatrix} \pi_1(U, z_0) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ [\gamma] \longmapsto W(h \circ \gamma, 0) \bmod n \end{bmatrix}$$

Aufgabe 10.4 $\Rightarrow \text{Im } P_n = \text{Ker } \partial$

Def Eine EXAKTE SEQUENZ ist

$$G_0 \xrightarrow{d_0} G_1 \xrightarrow{d_1} G_2 \rightarrow \dots \rightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} G_n$$

wobei:

- $\forall i=0, \dots, n$ G_i ist eine abelsche Gruppe
- $\forall i=0, \dots, n-1$ $d_i: G_i \rightarrow G_{i+1}$ ist eine Gruppenhomomor.
- $\forall i=1, \dots, n-1$ $\ker d_i = \operatorname{im} d_{i-1}$

Beispiel $f: G \rightarrow H$ Homomorphismus von abelschen Gruppen.

- $0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{f} H$ exakt $\Leftrightarrow \ker f = 0 \Leftrightarrow f$ injektiv.

- $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{0} 0$ exakt $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = H \Leftrightarrow f$ surjektiv.

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend $\Rightarrow$ Es gibt 3
exakte Sequenzen:

$$\textcircled{1} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{D} \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\partial} H^1(U, \mathbb{C})$$

$$\textcircled{2} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}(U) \xrightarrow{E} \mathcal{O}(U)^* \xrightarrow{\partial} H^1(U, \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{3} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}(U)^* \xrightarrow{P_n} \mathcal{O}(U)^* \xrightarrow{\partial} H^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$n \geq 2$ $k \bmod n \mapsto e^{\frac{2\pi i k}{n}}$

(sheaf cohomology)